

Régularité maximale conique

Travail en cours avec J. Auscher et S. Nonnenmacher.
avec des détails sur les outils.

(1) Des edp.
$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \operatorname{div} A(\cdot, \cdot) \nabla u(t, x) & \text{où } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

où $A \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, M_n(\mathbb{C}))$ (ici $\mathbb{C}$ est "abusé" comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)
et conditions d'ellipticité : $|\langle A(t, x) \xi, \eta \rangle| \leq C |\xi| |\eta|$
 $\operatorname{Re} \langle A(t, x) \xi, \bar{\xi} \rangle \geq C' |\xi|^2$

Version minimale :
$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad \text{Solution : } u(t, x) = e^{t\Delta} u_0(x).$$

Idee : Si $A \sim \operatorname{Id}$, $\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) + \operatorname{div}(A - \operatorname{Id}) \nabla u(t, x)$
$$u(t, x) = e^{t\Delta} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \operatorname{div}(A - \operatorname{Id}) \nabla u(s, x) ds$$

Problème de pt fixe associé : $\nabla \longmapsto \nabla \longmapsto \int_0^t \nabla \longmapsto$

et on veut perturber cela :
$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) + f(t, x) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

On s'attend à la solution
$$u(t, x) = e^{t\Delta} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s, x) ds$$

Espace de données : $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$: $\exists ! u \in C([0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n))$.

On va donc choisir comme perspective (*) comme e.d. dans l'espace des données.
Se pose naturellement la question : (régularité maximale)

$$f \mapsto (t, x) \mapsto \int_0^t \Delta e^{(t-s)\Delta} f(s, x) ds.$$

appartient bien à $B(L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^n)))$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

Δ si $p = \infty$, cela ne marche plus.

Mais on ne va pas prendre tout $L^p(\mathbb{R}^n)$ comme espace de données, mais
on va considérer $u_0 \in B^{q-r}$: on a $(t, x) \mapsto \Delta e^{t\Delta} u_0(x) \in L^p(L^q)$.

On peut aussi considérer $f(s, x, u(s, x))$, appli non linéaire.

(On a même considéré Navier Stokes dans ce contexte).

(1)

On de s.d. stochastiques $f(t, u) dN_t$.

Dans et exposé, on va s'intéresser au passage autonome $\rightarrow$ non autonome.

Idee: itérer en supposant A presque constante sur un petit intervalle, en deduire une nouvelle donnée initiale, etc.

2 soucis: on voudrait pouvoir travailler avec $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tout entier car sinon, à chaque étape de réitération, il faut étudier si la nouvelle c.i. est dans $B_{1-p}^{q,p}$.

Reformulation faible: $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t, u) \partial_t \varphi(t, u) dx dt = - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t, u) \operatorname{div} A^* \nabla \varphi(t, u) dx dt$

Q: qu'entend-on par unicité dans ce problème?

Pb: de cette reformulation, il faut m. q. la c.i. existe !?!

2. Espace de tentes et de Hardy

Cotfman, Meyer, Stein 85: "conique" $F: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\|F\|_{T^{p,2}} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \int_{B(x, \sqrt{t})} |F(t, y)|^2 dy dt \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}$$

$$\|F\|_{T^{p,\infty}} = \|x \mapsto \sup_{\substack{(y,t) \\ |y-x| \leq \sqrt{t}}} |F(t, y)|\|_{L^p}$$

La preuve de Fefferman - Stein 72 reste d'actualité!

$$\text{Si } \begin{cases} \partial_t u(t, u) = \Delta u(t, u) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}, \quad \|u_0\|_{H^p} \sim \|u\|_{T^{p,\infty}} \sim \|\nabla u\|_{T^{p,2}}$$

ou $H^1 = \begin{cases} L^p \text{ si } p \in]1, \infty[\\ H^1 \text{ si } p=1 \end{cases}$.

On a donc: espace des données: L^p
relatifs $T^{p,\infty}$.

Puis on passe à A continue en temps ;

(4c) Théorie L^p :

thm: Si $p \geq 2$ et $u \in L^p$, $\exists! u \in \tilde{T}^{p,\infty}$.

On utilise l'opérateur sous-linéaire $u \mapsto (|u|^2)^{p/2}$ sur L^p .

thm: Si $p < 2$, et $A \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, M_n(\mathbb{R}))$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ sol. faible} \\ u \in \tilde{T}^{p,\infty} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! u_0 \in L^p \text{ s.t. } u(t, x) = T(t, 0)u_0(x)$$

thm: Si $p < 2$ et $A \in BV(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^n, M_n(\mathbb{R})))$,
et $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^n))$.

Considérer existence et unicité, philosophie:

$$\|u\|_{T^{p,\infty}} \sim \|Du\|_{T^{p,2}}, \quad u = e^{t\Delta} u_0.$$

$$\|Du\|_{T^{p,2}} \lesssim \|u\|_{T^{p,\infty}}.$$

ce qui manque, c'est la direction
qui est le p plus géométrique. (atomique)

→ j'en serais pas fier de faire des atomes avec 2 opérateurs

Théorie L^2 : Idée: on teste sur des sol^s de l'équation rétrograde: or cette
eq. du Lap $p=2$, est sur le même espace.

Ph de $T^{p,2}$: espace non invariant par translation en temps.