Guillaume Cébron

(Encadré de Thierry Lévy)

Morphismes pour la convolution libre additive et multiplicative

Intro : Espace de proba n.c. $(\mathcal{A},\tau)$: c'est une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'un état positif $\tau : \mathcal{A}\to\mathbb{C}$. Pour $A=A^*\in\mathcal{A}$, la distribution μ_A est déterminée par $\tau\circ f(A)=\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_A$

Si $A=A^*, B=B^*\in\mathcal{A}$, on peut p.ex. définir la convolution $\mu_A*\mu_B$ par $\mu_A*\mu_B=\mu_{A+B}$ pour A, B indépendants

Si A et B sont libres, alors $\mu_{A+B}=\mu_A\boxplus\mu_B$.

<u>Indépendance</u> : A et B sont <u>indépendants</u> ssi A et B commutent et pour $C_1\in\mathbb{C}[A]$, $C_2\in\mathbb{C}[B]$, $\tau(C_1C_2)=\tau(C_1)\tau(C_2)$

<u>Liberté</u> : A et B sont libres ssi pour $C_1,\dots,C_n$ pris alternativement dans $\mathbb{C}[A]$ et $\mathbb{C}[B]$, alors $\tau(C_1)=\dots=\tau(C_n)=0\Rightarrow\tau(C_1\dots C_n)=0$.

$*$ et $\boxplus$ agissent sur les probabilités sur $\mathbb{R}$.

Si A et $B\in\mathcal{A}$ sont unitaires ($AA^*=1_A$)

- et que A et B sont indépendants, alors $\mu_{AB}=\mu_A\circledast\mu_B$
- et que A et B sont libres, alors $\mu_{AB}=\mu_A\boxtimes\mu_B$

agissent sur $\mathbb{U}$.

push-forward

Si $A=A^*$, alors e^{iA} est unitaire. On notera $\mu_{e^{iA}}=\mathbb{e}_*(\mu_A)$ avec $\mathbb{e}:x\mapsto e^{ix}$.

Si A et B sont indépendants, $e^{i(A+B)}=e^{iA}e^{iB}$.

Autrement dit $\mathbb{e}_*(\mu*\nu)=\mathbb{e}_*(\mu)\circledast\mathbb{e}_*(\nu)$

Dans le cas où A et B sont libres, on n'a pas nécᵗ commutativité et e^{iA+B} peut être $\neq e^{iA}e^{iB}$. Comment passer de $\boxplus$ à $\boxtimes$?

1) Morphismes entre convolutions :

$\mathcal{H}_N$: matrices hermitiennes $=\{H\in M_N(\mathbb{C}) : H=H^*\}$

$U(N)$: unitaires $=\{U\in M_N(\mathbb{C}) : UU^*=1_N\}$

$\mathbb{e} : H\mapsto e^{iH}$ a encore un sens.

Comme $e^{i(H_1+H_2)} \neq e^{iH_1} e^{iH_2}$ en général, $e_*(\mu * \nu) \neq e_*(\mu) \circledast e_*(\nu)$, mais on sait comment s'en sortir : prenons des mesures qui se divisent en petits incréments ; les mesures infiniment divisibles, i.e. t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\mu^{*\frac{1}{n}}$ tel que $\underbrace{\mu^{*\frac{1}{n}} * \dots * \mu^{*\frac{1}{n}}}_{n \text{ fois}} = \mu$.

On notera $ID(\mathcal{H}_N, *)$ cet espace de mesures.

<u>Fait</u> (Estrade) : si $\mu \in ID(\mathcal{H}_N, *)$, alors $e_*(\mu^{*\frac{1}{n}}) \circledast \dots \circledast e_*(\mu^{*\frac{1}{n}}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mu)$.

Idée : Si $\mu \in ID(\mathcal{H}_N, *)$, μ est la distribution de $(H_t)_{t \geq 0}$ à un temps t et on considère $e^{i(H_{\frac{t}{n}} - H_0)} \dots e^{i(H_t - H_{\frac{t(n-1)}{n}})}$

Si μ et ν sont $ID(\mathcal{H}_N, *)$ sont unitairement invariants (invariants par conjugaison par une matrice unitaire), $\mathcal{E}(\mu * \nu) = \mathcal{E}(\mu) \circledast \mathcal{E}(\nu)$

On définit $ID(\mathbb{R}, \boxplus)$.

Th (Cébron) Pour $\mu \in ID(\mathbb{R}, \boxplus)$, $e_*(\mu^{\boxplus\frac{1}{n}}) \boxtimes \dots \boxtimes e_*(\mu^{\boxplus\frac{1}{n}}) \xrightarrow{n \to \infty} e_{\boxplus}(\mu)$.

et $e_{\boxplus}(\mu \boxplus \nu) = e_{\boxplus}(\mu) \boxtimes e_{\boxplus}(\nu)$.

Cela correspond à qqch au niveau des opérateurs
$$e^{i(X_{\frac{t}{n}} - X_0)} e^{i(X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}})} \dots e^{i(X_t - X_{t\frac{n-1}{n}})}$$
en utilisant $ID(\mathbb{R}, \boxplus) \longleftrightarrow$ processus de Levy $(X_t)_{t \geq 0}$ à accroissements stationnaires et libres. $dU_t = U_t \, dX_t$.

On peut résumer la situation comme ceci :

$$\begin{array}{ccc} ID(\mathbb{R}, *) & \xrightarrow{\Lambda} & ID(\mathbb{R}, \boxplus) \\ \downarrow e_* & & \downarrow e_{\boxplus} \\ ID(\mathbb{U}, \circledast) & \xleftarrow[\text{(avec une multiplicité)}]{\Gamma} & ID(\mathbb{U}, \boxtimes) \end{array}$$

et le morphisme de Bercovici-Pata dans tout cela ?

Th (Bercovici-Pata '97) : Pour $\mu \in ID(\mathbb{R}, *)$, $(\mu^{*\frac{1}{n}}) \boxplus \dots \boxplus (\mu^{*\frac{1}{n}}) \to \Lambda(\mu)$

et on a $\Lambda(\mu) \boxplus \Lambda(\nu) = \Lambda(\mu * \nu)$

T correspond à un théorème de Chistyakov et Götze de 2008.

Ex : $\mathcal{N}_t$ une gaussienne $ID(\mathbb{R},*)$. Alors

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}_t \arrow[r, "\Lambda"] & S_t \arrow[d, "e_{\boxplus}"] \\ e_*(\mathcal{N}_t) & B_t \arrow[l, "\Gamma"'] \end{tikzcd}$$

S_t : mesure semi-circulaire de variance t.

B_t : mesure d'un mvt brownien unitaire libre au temps t.

On a des th plus puissants qui permettent de transférer certains th d'une convolution à l'autre.

Th (Cébron 2014) "central limite" : Pour $\mu \in ID(\mathbb{R},\boxplus)$ et (μ_n) telle que

$$\underbrace{\mu_n \boxplus \dots \boxplus \mu_n}_{n \text{ fois}} \xrightarrow{n\to\infty} \mu, \text{ on a}$$

$$e_*(\mu_n) \boxtimes \dots \boxtimes e_*(\mu_n) \to e_{\boxtimes}(\mu)$$

2. Matrices aléatoires. Considérons

$$\begin{tikzcd} ID(\mathbb{R},*) \arrow[d, "e_*"] & ID(\mathcal{H}_N,*) \arrow[d, "\mathcal{E}"] & ID(\mathbb{R},\boxplus) \arrow[l, "\Pi_N"'] \arrow[l, dashed, shift right=2, "N\to\infty"] \arrow[d, "e_{\boxplus}"] \\ ID(\mathbb{U},\circledast) & ID(\mathcal{U}(N),\circledast) & ID(\mathbb{U},\boxtimes) \end{tikzcd}$$

Th (Benaych-Georges, Cabanal-Duvillard 2005). Si $\mu \in ID(\mathbb{R},\boxplus)$, $N \in \mathbb{N}$, soit H_N la matrice aléatoire de loi $\Pi_N(\mu)$:

$$\mu_{H_N} = \frac{1}{N}\sum_{\lambda \text{ v.p. de } H_N} \delta_\lambda \longrightarrow \mu \quad (\text{cv étroite en moyenne})$$

Q : Peut-on trouver $ID(\mathcal{U}(N),\circledast) \xleftarrow{T_N} ID(\mathbb{U},\boxtimes)$ ($N\to\infty$)

<u>Th</u> (Cébron 2014) Soit $\mu \in ID(\mathbb{U},\boxtimes)$:
Pour $N \geq 1$, on définit U_N de loi $T_N(\mu)$. Alors $\mu_{U_N} \xrightarrow{N\to\infty} \mu$ (cv étroite en moyenne)

ou encore $E\left[\frac{1}{N}\operatorname{tr}(U_N^k)\right] \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{U}} x^k \, d\mu$

Faisons-le à présent pour un processus de Lévy en entier :

Un processus de Lévy multiplicatif libre est un processus $(U_t)_{t\geq 0}$ unitaire et dont les accroissements sont libres et stationnaires (accr. à droite : $U_s^{-1}U_{t+s}$).

Th : Pour $(U_t)_{t\geq 0}$ processus de Lévy multiplicatif libre, les marginales $(\mu_{U_t})_{t\geq 0}$ forment un semigroupe pour $\boxtimes$. Alors $(T_N(\mu_{U_t}))_{t\geq 0}$ est un semigroupe sur $U(N)$ pour $\circledast$.

Il existe $(U_t^{(N)})_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de marginales $(\Gamma_N(\mu_t))$, sur $U(N)$, et $(U_t^{(N)})_{t\geq 0}$ cv en distribution nc vers $(U_t)_{t\geq 0}$.

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\operatorname{tr}\left(P(U_{t_1}^{(N)},\dots,U_{t_n}^{(N)})\right)\right] \xrightarrow{N\to\infty} \tau\circ P(U_{t_1},\dots,U_{t_n}).$$

Ce processus a déjà été exposé hier.

Q : Est-ce que la f^n exponentielle est spéciale, ou peut-on par exemple utiliser la f^n de Cayley ? Est-ce seulement le développement limité qui importe.