17/2/2015

Corentin Avicou
avec Isabelle Chalendar
Jonathan Partington

semigroupes d'opérateurs de composition sur les espaces de Hardy
en fait, $H^2(\mathbb{D})$

Rappel : $H^2(\mathbb{D}) = \{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : (\sum |a_n|^2)^{1/2} < \infty \}$

exemples : • les polynômes
• $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \in H^2(\mathbb{D})$, alors que $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \notin H^2(\mathbb{D})$.

Def : Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique. On définit alors $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \circlearrowleft$
$f \longmapsto f \circ \varphi$.

Q : Calculer $\|C_\varphi\|$!

On a des estimations : $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}} \leq \|C_\varphi\|$

$\|C_\varphi\| = 1 \iff \varphi(0) = 0$

On va tenter une approche par semigroupes (cf art de Partington et al.)

Def : Un C_0-semigroupe est $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{T} \mathcal{L}(H)$ telle que $T(0) = Id$
et $T(s+t) = T(s) \circ T(t)$ et $t \longmapsto T(t)x$ est continue pour chaque x.

Ex : ① $t \longmapsto f(e^{-ct} z)$ $\operatorname{Re} c > 0$
② $t \longmapsto f(e^{-t} z + 1 - e^{-t})$
③ $t \longmapsto f\left(\frac{z + \operatorname{th} t}{1 + (\operatorname{th} t) z} \right)$

Def : un semigroupe est analytique s'il admet une extension analytique à un secteur $\Sigma_\alpha := \{ re^{i\alpha} : r > 0, \alpha \in]-\vartheta, \vartheta[\}$
$\exists \vartheta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ $\exists \tilde{T}$ analytique $\tilde{T}|_{\mathbb{R}_+} = T$

$\sup_{\Sigma_\vartheta \cap \mathbb{D}} \|\tilde{T}(\cdot)\| < \infty$

Définition : Soit T un semigroupe : son générateur est donné par $Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}$
sur $D(A)$, l'ensemble des points où cette lim existe.

Ex. ① : $A f(z) = -cz f'(z)$
② $A f(z) = (1-z) f'(z)$
③ $A f(z) = (1-z^2) f'(z)$.

II Le vif du sujet : Notation : $C_{\varphi_t} : f \longmapsto f\circ\varphi_t$, A le générateur associé à (C_{φ_t}) et G le générateur associé à (φ_t) (nous considérons en fait des semiflots

Q : quel est le lien entre les deux générateurs ? Domaine ?

$T : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}\}$ où on suppose que $(t,z) \longmapsto T(t)z$ est continue

On a le Th fondamental de Berkson - Porta (1978) : G est défini sur $\mathbb{D}$, et

$G(z) = \lim \dfrac{\partial\varphi_t(z)}{\partial t}$. On a $\overline{A}f = Gf'$ et $D(A) = \{f\in H^2(\mathbb{D}) : Gf' \in H^2(\mathbb{D})\}$

Q : Peut-on calculer $\|C_{\varphi_t}\|$? Oui ! $\|C_{\varphi_t}\| = e^{\Lambda t}$ avec $\Lambda = \sup \operatorname{Re} W(A)$. A. Siskakis 1998

Peut-on calculer $\|C_\varphi\|$? Non ! Problème : Ds le 2e flot on suppose φ injectif.

Q : Soit $G \in H^2(\mathbb{D})$. G est-il un générateur ? R : c'est le cas ssi $\sup\limits_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}(\bar{z}G(z)) \leq 0$

G génère un groupe ssi $\operatorname{Re}\, \bar{z}\, G(z) \equiv 0$.

le semiflot est analytique ssi $\sup\limits_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re} e^{i\alpha}\bar{z}G(z) \leq 0$ pour $\alpha \in \{-\vartheta, 0, \vartheta\}$

Un groupe analytique est trivial : c'est l'identité

Autre résultat : G générateur de semiflot ssi $G(z) = F(z)(\bar{\alpha}z - 1)(z - \alpha)$ où $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$, $\operatorname{Re} F \geq 0$, $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.

1er cas : si $\alpha \in \mathbb{T}$, on peut supposer $\alpha = 1$. Alors $\exists c \in \mathbb{C}_+ \exists h$ conforme $\varphi_t(z) = h^{-1}(ct + h(z))$

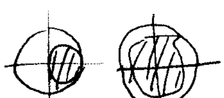
2e cas : Si $\alpha \in \mathbb{D}$, on peut supposer $\alpha = 0$ et $\exists c \in \mathbb{C}^+ \exists h$ conf tq $\varphi_t(z) = h^{-1}(e^{-ct}h(z))$

Ds le 1er cas, "close-to-convex domain". Ds le 2e cas "spiralic domain"

Compacité : ~~Du point de vue des op. de composition~~ si $\|\varphi\|_\infty < 1$, C_φ est compact.

Si $m(\{\xi \in \mathbb{T} : \lim\limits_{r\to 1^-} |\varphi(r\xi)| = 1\}) > 0$, alors C_φ n'est pas compact.

Si φ est injective (c'est le cas pour nous), C_φ est compact ssi $\lim\limits_{z\to\xi} \dfrac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0$

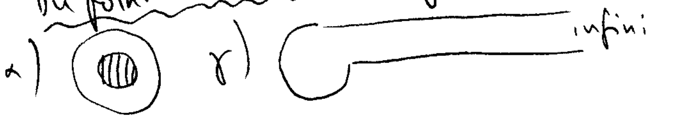


non cpct

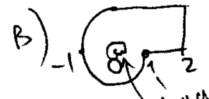
Du point de vue des semigroupes : on a 3 cas : α) semigroupes immédiatement compact pour chaque t

β) ———— éventuellement compact

γ) ———— jamais



infini



à partir d'un certain moment on est compact.

$*$ $T(t)$ est compact pour $t > t_0$ ssi $T(t_0)R(\lambda, A)$ est compact et $T(t)$ unif continue pour $t > t_0$.

Lemme : si $\alpha = 0$, la résolvante est compacte ssi $\forall \xi \in \mathbb{T}$ $\lim\limits_{z\to\xi} \left|\dfrac{G(z)}{z-\xi}\right| = \infty$

Théorème : si (C_{φ_t}) est un semigroupe analytique, alors (C_{φ_t}) est compact ssi $\exists \alpha \in \mathbb{D}$ $G(\alpha) = 0$ et $\forall \xi \in \mathbb{T}$ $\lim\limits_{z\to\xi} \left|\dfrac{G(z)}{z-\xi}\right| = \infty$

Point de Denjoy Wolff : le compact s'écrase sur ce point