Evguéni Abakoumov
10/3/2015

Séries harmoniques cv $\to 0$ p.p.

avec E. Doubtsov

Cadre : $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$, variable $z = e^{i\theta}$

Pour f f° sur $\mathbb{T}$, existe-t-il une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ qui converge vers f p.p.

Th. Carleson : si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\sum \hat{f}(n) z^n \longrightarrow f$ p.p.

⚠ Il n'y a pas toujours de coefficient de Fourier : e.g., si $f \notin L^1(\mathbb{T})$

⚠ Il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\sum \hat{f}(n) z^n$ diverge p.p. (Kolmogorov, alors étudiant à Moscou)

On pose donc deux problèmes :

1) Soit $L^0(\mathbb{T})$ les f^{ons} mesurables sur $\mathbb{T}$. Existe-t-il $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ t.q. $\sum a_n z^n \longrightarrow f$ p.p. ?

2) Ce développement est-il unique ?

Réponses : 1) Oui (Menchov 1941)

2) Non (Menchov 1916). C'est équivalent à : Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \neq 0$ telle que $\sum a_n z^n \longrightarrow 0$ p.p. "null-series"

Menchov était étudiant de Lusin, qui a posé ces questions en 1915.

Problème apparenté : Déf. : $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est un spectre de Menchov si pour tout $f \in L^0(\mathbb{T})$ il existe $\sum'_{n\in\Lambda} a_n z^n \longrightarrow f$ p.p.

Arutyunyan '85 : Si Λ est symétrique et que Λ contient des intervalles de $\mathbb{Z}$ arbitrairement longs, Λ est de Menchov.

Kozma – Olevskii ~2005 : Il existe $\Lambda = \{\pm \lambda_n\}$ tel que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \longrightarrow +\infty$ et Λ Menchov

De plus, $\forall\, \varepsilon_n \downarrow 0$ $\exists \Lambda = (\pm\lambda_n)$ $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1+\varepsilon_n$ et Λ Menchov

Remarque : Si Λ Hadamard ($\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1+\varepsilon$ indépt de n), Λ n'est pas Menchov.

Th (Kozma, Olevskii) Si $\Lambda = \{\pm n^2\}$, Λ n'est pas Menchov, et même si

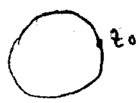
$\Lambda = \{\pm n^2 + O(1)\}$, ———.

Mais $\forall\, \delta(n) \uparrow \infty$ $\exists \Lambda = \{\pm n^2 + \delta_1(n)\}$ Λ Menchov, où $|\delta_1(n)| < \delta(n)$.

Q : (n^3) est-il un spectre de Menchov.

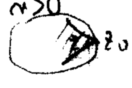
Körner a obtenu ces résultats indépendamment

Th : $\mathbb{Z}_+$ n'est pas un spectre de Menchov : les séries $\sum a_n z^n$ gardent certaines



"traces d'analyticité". Cela repose sur le théorème d'Abel : Si $\sum'_{n\geq 0} a_n z_0^n \to A$

alors $\sum'_{n\geq 0} a_n z^n \longrightarrow A$ pour $z \to z_0$ dans un angle de Stolz



De plus, Privalov a montré : si $g(z) = \sum b_n z^n$ est telle que $\sum' b_n z^n \underset{z \to w}{\longrightarrow} 0$ pour w dans un ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure > 0, alors $g \equiv 0$. (dans un angle de Stolz)

Remarque : Th (Kozma-Olevskii) Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, il existe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n \underset{\text{en mesure}}{\longrightarrow} f$.

Th (Kozma-Olevskii) (2006, Annals) : $\exists \sum_{n \geq 0} a_n z^n \longrightarrow f \in L^2(\mathbb{T}) \setminus H^2(\mathbb{T})$ p.p.

On peut même choisir f lisse : $f \in C^\infty$.

Idée : on prend $K \subset \mathbb{T}$ de mesure nulle et $F(z) = e^{\int \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)}$ telle que $\hat{F}(n) \to 0$ et une mesure μ sur K (ce n'est pas possible si K de mesure de Hausdorff 0.

Pb2) : Unicité. Pour quel Λ a-t-on une série telle que $\sum_{n \in \Lambda} a_n z^n = 0$.

On a néc^t $(a_n) \notin \ell_2$. Si $(b_n) \notin \ell_2$, elle est admissible si $\exists c_n \begin{cases} \sum c_n z^n \to 0 \text{ p.p} \\ |c_n| \leq b_n \end{cases}$

méthode de Menchov

Ivashev-Musatov '57 ont montré que $b_j = (|j| \log |j| \cdots \log^{(s)} |j|)^{-\frac{1}{2}}$ est admissible.

(Idée : on prend μ mesure sur K de mesure nulle avec $\hat{\mu}(n) \to 0$ (mesure de Rajchman) et on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}(n) z^n \longrightarrow 0$ pour $z \in \mathbb{T} \setminus K$

Körner 1987 : toute (b_n) symétrique décroissante, non dans ℓ^2, est admissible.

Th (K-O) : Il existe une null série $\sum c_n z^n \longrightarrow 0$ p.p. t.q. $\sum |c_n|^4 < \infty$.

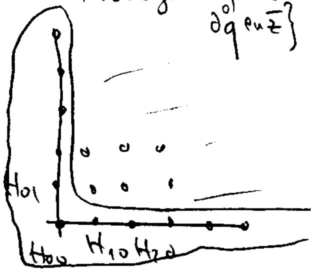
$\longrightarrow$ on prend l'ex d'Annals et on soustrait, à $\sum \hat{f}(n) z^n$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

(méthode Zygmund produits de Riesz)

ex : $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$, $S_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| = 1\}$: $L^2(S_n) = \ell_2\text{-}\bigoplus_{\substack{p \geq 0 \\ q \geq 0}} H_{p,q}$, où $H_{p,q} = \{$polynôme P : P homogène d° p en z, d° q en $\bar{z}\}$

Classe très importante : f^n plurisousharmonique : PSH $= \bigoplus_{p \geq 0} (H_{p0} + H_{0p})$

$H_{0p} = \overline{H_{p0}}$ par dénombrement de z et $\bar{z}$.



Th (Aleksandrov-Doubtsov) $\exists (h_j) \in H_{j0}$ avec $h_j \not\equiv 0$ et $\underbrace{\sum h_j + \overline{h_j}}_{\in PSH} \longrightarrow 0$

Pb : le support des mesures sera toujours dense dans la sphère.

Construction : produits de Riesz plurisousharmoniques et polynômes de Ryll-Wojtaszczyk : $\|h_j\|_\infty = 1$ et $\|h_j\|_2 > \varepsilon$.

Th : Si Λ^C contient des intervalles arbitrairement longs, $\exists (h_j) \neq 0$ $\sum_\Lambda h_j + \overline{h_j} \longrightarrow 0$ p.p.

Disons que $(b_n)_{n \geq 0}$ est admissible si $\exists (h_j)$ $\sum h_j + \overline{h_j} = 0$ p.p et $\|h_j\|_2 \leq b_n$.

Si $(b_n) \in \ell_2$, (b_n) n'est pas admissible, (b_n) n'est pas admissible

Th : Si $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b_n) est admissible. (mais on ne sait si on peut rajouter des log !)

Ici tous les Λ sont symétriques.