Benoît Kloeckner

Géométrie de l'espace de Wasserstein.

Soit (X,d) un espace métrique polonais (complet séparable)

(1) transport optimal

→ le problème de Monge (pour $X=\mathbb{R}$).

Quelle est la manière la plus économique de faire un déblai d'une certaine forme pour réaliser un remblai d'une autre forme
le coût est seulement le transport, de deux mesures $\mu_0, \mu_1 \geq 0$.
On peut supposer que ce sont des probas.

Objectif : $\min \left\{ \int d(x, T(x))\, d\mu_0(x) : T_*\mu_0 = \mu_1 \right\}$

Problème fortement non linéaire. $T_*\mu_0(A) = \mu_0(T^{-1}(A))$.

T ne peut pas exister. (Si μ_0 dirac en x, μ_1 dirac en $T(x)$).

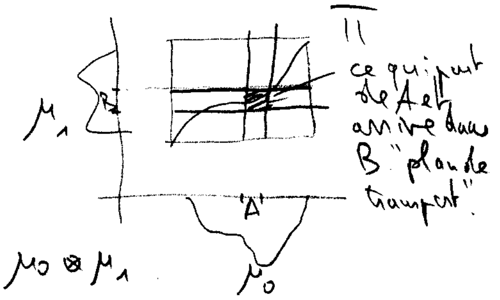
Donc ce problème est mal posé.

Kantorovich reformule ce problème : objectif :

$$\min \left\{ \int d(x,y)\, d\Pi(x,y) : P_{0*}\Pi = \mu_0,\ P_{1*}\Pi = \mu_1 \right\}$$

où $P_0 : (x,y) \longmapsto x$, $P_1 : (x,y) \longmapsto y$ i.e. μ_0, μ_1 marginales de Π

C'est une relaxation du cas où Π est le support d'un graphe.



On note $\Gamma(\mu_0,\mu_1)$ les plans de transport Π.

Avantage : . $\Gamma(\mu_0,\mu_1)$ n'est pas vide : il contient $\mu_0 \otimes \mu_1$

. le problème est linéaire

→ programmation convexe, optimisation linéaire : il existe toujours un min.
→ permet de répondre à la question de Monge.

2) Espace de Wasserstein. (ici X compact).

On fixe $p \geq 1$ et on note $W_p(\mu_0, \mu_1) = \min \left\{ \int d(x,y)^p \, d\Pi : \Pi \in \Gamma(\mu_0,\mu_1) \right\}^{1/p}$

Alors W_p est une distance sur $\mathcal{P}(X) = \{$mesures de proba$\}$ qui métrise la topologie faible-$*$.

Pour $p = \infty$, les q. deviennent très $\neq$.

Dualité (au sens de la programmation linéaire) : $p = 1$

On a $W_1(\mu_0,\mu_1) = \min \left\{ \int d(x,y) \, d\Pi : \Pi \in \Gamma(\mu_0,\mu_1) \right\}$
$$= \max \Big\{ \underbrace{\int f \, d\mu_0 - \int f \, d\mu_1 : f : X \xrightarrow[1-lip]{} \mathbb{R}}_{\text{convexe dual de } \Gamma(\mu_0,\mu_1)} \Big\}.$$

L'$\leq$ $\max \leq \min$ est facile : $\forall \Pi \in \Gamma(\mu_0,\mu_1)$ $\forall f \in 1\text{-lip}$

$$\int f(x) d\Pi(x,y) - \int f(y) d\Pi(x,y) = \int (f(x) - f(y)) \, d\Pi(x,y) \leq \int d(x,y) \, d\Pi(x,y).$$

$\overset{\shortparallel}{\int f d\mu_0 - \int f d\mu_1}$.

Lien avec les espace Lip-libres : $Lip_0(X) = \{ f : X \xrightarrow{lip} \mathbb{R} \quad f(o) = 0 \}$ où $o \in X$.

$Lip_0(X)^* \ni \delta_x$

$\mathcal{F}(X) = \overline{vect}(\delta_x ; x \in X)$

Par définition, $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{F}(X)$ et $\|\mu_0 - \mu_1\|_{\mathcal{F}(X)} = \sup_{f \in Lip_0} \int f d\mu_0 - \int f d\mu_1$

Ainsi W_1 est naturellement un convexe de $\mathcal{F}(X)$.

Q$^{\text{en}}$: Quelles propriétés géométriques de $W_p(X)$ peut-on déduire des propriétés de X ?

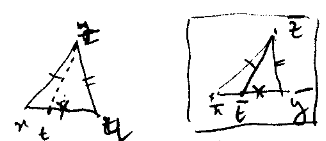
Lott Villani Sturm : X de courbure de Ricci minorée par ω de dim $\leq \omega \iff W_p(X)$ a telle ou telle propriété.

3) Plongement d'espace euclidiens.

Proposition : Si $\mathbb{R} \xrightarrow[\text{isométrique}]{} X$, alors $\mathbb{R}^N \xrightarrow[\text{bilip}]{} W_2(X)$
(cela devrait marcher pour $W_p(X)$, $p > 1$)

Th (avec Jérôme Bertrand de Toulouse) Si X est $CAT(0)$ (courbure ≤ 0) avec la propriété de visibilité, alors $\mathbb{R}^2 \not\hookrightarrow_{\text{isom}} W_2(X)$

ex : X = arbre, $X = \mathbb{H}^n$: $CAT(0)$ exprime que la courbure se voit ainsi de manière géométrique !
(équivalence si ~~simplement~~ convexe).



$d(z,t) \leq d(\bar z, \bar t)$

la visibilité est une propriété légèrement plus forte que $\mathbb{R}^2 \underset{\text{isom}}{\not\hookrightarrow} X$

<u>brève idée de dém:</u> on ne regarde que les informations à très grande échelle.

(4) Plongements entre espaces de Wasserstein.

Q°. Si X est "trop gros" pour être plongé (bilip) dans X',
la même chose est-elle vraie pour $W_p(X)$ dans $W_{p'}(X')$?

dim X = dimension de Hausdorff
$\overline{M}$-dim X = dim de Minkowski supérieure. "ordre du # boules de petit rayon pour recouvrir X".
en prenant des boules variables ... dim de Hausdorff.
Malheureusement, dans les preuves, on ne peut se passer de $\overline{M}$-dim
On a toujours dim $X \leq \overline{M}$-dim X

Th (Kloeckner): Si X, X' compacts avec dim $X > \overline{M}$-dim X' et $p, p' \in [1, +\infty[$,
alors $W_p(X) \underset{\text{bilip}}{\not\hookrightarrow} W_{p'}(X')$.
Idée: trouver une notion de dimension appropriée aux espaces de Wasserstein
Définir des invariants bilip monotones pour $\hookrightarrow$ qui généralisent la dimension de Hausdorff et M-dim.: crit_S, $\overline{M}\text{-crit}_S$: "remplacer toute f° puissance par une fonction plus méchante: $S = (\varepsilon \mapsto e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^s})$
les petites boules comptent vraiment très ↑: un s entre les deux régimes
ε rayon de la boule
ne prise en compte

Puis on fait une <u>majoration</u>: $\overline{M}\text{-crit}_S\, W_p(X) \leq \overline{M}$-dim X
et une <u>minoration</u>: $\text{crit}_S\, W_p(X) \geq \dim X$: plus subtil: plonger des espaces (à la main) très simples dans $W_p(X)$ et utiliser la monotonie.
Plonger $W_p(Y)$ dans $W_p(X)$ où $Y \underset{\text{bilip}}{\hookrightarrow} X$ est suffisamment simple.
2 approches pour choisir:
(1) une suite suffisamment séparée: cela peut déjà donner un espace de Wasserstein très gros !! → justifie l'apparition de M-dim

2 2^e approche : prendre Y ultramétrique (à bilip près)

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$$

Mendel-Naor (squelette ultramétrique) Si X compact métrique et $s < \dim X$, alors il existe Y ultramétrique de dim $\geq s$ tel que $Y \xhookrightarrow[\text{bilip}]{} X$

ex : Cantor triadique (presque ultramétrique : il suffit de changer un peu la distance)

ultramétrique s'exprime : il n'y a pas de point qui soit plus ou moins au milieu de deux autres.

Cela permet de conclure. et cela se généralise.

l'ultramétricité permet de rendre le transport optimal trivial : (si tant est que l'arbre est équilibré)

Q : passer de bilip à bihölder.