Uwe Franz
2/6/2015

Formule de Lévy-Khintchine.

X ensemble non vide.

Déf 1 K noyau $: X \times X \to \mathbb{C}$ est hermitien si $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$,

déf. pos (pd) si $\sum \overline{\lambda_j} \lambda_k K(x_j, x_k) \geq 0$ pour $n \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_n \in X$,

cond. déf. pos (cpd) si K est hermitien et que — '' — pour $n \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\sum \lambda_j = 0$, $x_1, \dots, x_n \in X$.

Lemme : Si K, L sont deux noyaux avec $K(x,y) = L(x,y) - L(x,x_0) - L(x_0,y) + L(x_0,x_0)$ pour un $x_0 \in X$, alors K p.d. $\Leftrightarrow$ L c.p.d.

Th (Schoenberg) : Soit $K_t(x,y) = e^{tL(x,y)}$. Alors K_t p.d. pour tout $t > 0 \Leftrightarrow L$ c.p.d.

Th : $K : X \times X \to \mathbb{C}$ p.d $\Leftrightarrow$ $\exists (H, \eta)$ H espace de Hilbert, $\eta : X \to H$
$K(x,y) = \langle \eta(x), \eta(y) \rangle$ pour $x, y \in H$.

Le cas qui nous intéresse : $X = G$ groupe, $K(g_1, g_2) = f(g_1^{-1} g_2)$, $f : G \to \mathbb{C}$.
On dit que f est p.d. (ou c.p.d.) si K l'est.

Considérons $\mathbb{C}G$ la $*$-algèbre sur $\mathbb{C}$ de G, $\mathbb{C}G = \{ \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j : n \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \dots \}$ avec la multiplication de G (+ extension linéaire) et l'involution $g^* = g^{-1}$ (+ extension linéaire conjuguée)

Soit $\phi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$: ϕ est positive (i.e. $\phi(a^*a) \geq 0$ pour tout $a \in A$) ssi $\phi|_G$ est p.d
ϕ est cond. pos., i.e. positive sur $\ker \varepsilon$, où $\varepsilon : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$, $\sum \lambda_j g_j \mapsto \sum \lambda_j$, ssi $\phi|_G$ est c.p.d.

Normalisation : On suppose $\phi(1) = 1$ pour ϕ p.d.
et que $\phi(1) = 0$ pour ϕ c.p.d.

On a f c.p.d avec $f(1)=0$ $\Leftrightarrow$ $\exists H$ Hilbert $\exists \pi$ rep $\underset{\text{involutive de } \mathbb{C}G}{\overset{\text{unitaire de } G}{=}}$ $\exists \eta : G \to H$

π-ε-1-cocycle : $\eta(g_1 g_2) = \pi(g_1)\eta(g_2) + \eta(g_1)\varepsilon(g_2)$
tel que $-\partial f(g_1, g_2) = -(\overset{=1}{\varepsilon(g_1)} f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)\overset{=1}{\varepsilon(g_2)}) = \langle \eta(g_1^*), \eta(g_2) \rangle$

(la formule reste vraie sur $\mathbb{C}G$.)

Une stratégie pour classer les cpd :

- classifier les rep. unitaires de G. (souvent déjà fait) ...impossible pour le groupe libre...
- classifier les π-ε-1-cocycles.
  - il y a les cocycles triviaux (cobords) $= \{\partial v : g \mapsto \pi(g)v - v\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon(g)}}\}_{v\in H}$

On définit $\underset{1^{er}\text{ groupe de cohomologie}}{H_1(G,\pi)} = Z_1(G,\pi)\big/ B_1(G,\pi)$

où $Z_1(G,\pi) = \{\pi\text{-}\varepsilon\text{-}1\text{-cocycles}\}$

Th : Soit G groupe dont toutes les classes de conjugaison $C(g) = \{hgh^{-1} : h\in G\}$ sont finies et π une représentation unitaire irréductible non triviale.

Alors $H_1(G,\pi) = \{0\}$.

⚠ • il y a des rep. non irréductibles avec cocycles non triviaux.
 • il faut étudier la rep. triviale.

Ex : $\mathbb{Z}^d$ = groupe libre commutatif avec d générateurs :

$H_k(\mathbb{Z}^d,\pi) = \{0\}$ pour $\pi\neq\varepsilon$ irred. et $k\geq 1$.

$$H_k(\mathbb{Z}^d,\varepsilon) \cong \begin{cases} \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} & \text{pour } k=1,\dots,n \\ \{0\} & \text{si } k\geq n+1 \end{cases}$$

En particulier, $H_1(\mathbb{Z}^d,\varepsilon) = \mathbb{C}^d$. Si $\pi=\varepsilon$, $\eta(g_1g_2) = \eta(g_1)+\eta(g_2)$, $\eta(g^{-1}) = -\eta(g)$ puisque $\eta(1) = \eta(g^{-1}g) = \eta(g^{-1})+\eta(g)$

pour η ε-ε-1-cocycle. et $\eta(g_i) = x_i$ avec $x_1,\dots,x_d\in\mathbb{C}$ s'étend en un unique ε-ε-1-cocycle. Ce n'est pas un cobord car $B_1(\mathbb{Z}^d,\varepsilon) = \{0\}$, $(\partial v)(g) = \varepsilon(g)v - v\varepsilon(g) = 0$

- trouver les f^{ns} c.p.d associées à (H,π,η) : Si η est un cobord, $\eta = \partial v$ et on peut prendre $f(g) = \langle v, (\pi(g)-\varepsilon(g))v\rangle$, mais si η n'est pas un cobord, l'existence de f n'est pas garantie

Ex. $\mathbb{Z}^2$: $g_1g_2 = g_2g_1$ et $-(f(g_1) - f(g_1g_2) + f(g_2)) = -(f(g_1) - f(g_2g_1) + f(g_2))$

et donc $\langle x_1,x_2\rangle = \langle x_2,x_1\rangle \iff \langle x_1,x_2\rangle\in\mathbb{R}$, $\langle\eta(g_1^{-1}),\eta(g_2)\rangle = \langle\eta(g_2^{-1}),\eta(g_1)\rangle$. C'est la seule obstruction !

Quel rapport avec la formule de Lévy-Khinchin ?

Déf. Une f^n c.p.d $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est gaussienne si $\pi(g) = \varepsilon(g) Id_H$ (on suppose $\eta(G)$ total dans H)

On peut toujours décomposer H, π, η en une partie gaussienne et un "reste" :

$$H_G = \bigcap_{g \in G} \ker(\pi(g) - \varepsilon(g) Id_H) \qquad H_R = H_G^\perp$$

$$\pi = \underset{\pi|_{H_G}}{\pi_G} \oplus \underset{\pi|_{H_R}}{\pi_R} \qquad \eta = \underset{P_G \circ \eta}{\eta_G} + \underset{P_R \circ \eta}{\eta_R}$$

P_G, P_R projections orthogonales sur H_G et H_R.

Problème : existe-t-il $f_G, f_R : G \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f = f_G + f_R$ et $H_{G,R}, \pi_{G,R}, \eta_{G,R}$ sont les "rep. GNS associées à f_G et f_R".

Pas tjs ! C'est le cas pour les bigèbres commutatives, $A = \mathbb{C}G$; G comm.

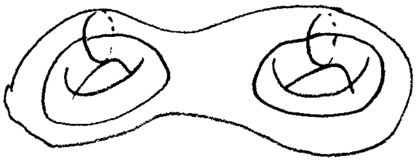
Il existe des groupes avec f^{ns} cpd qui n'admettent pas une telle décomposition.

ex : B_d = groupe fondamental d'une surface orientée de genre $d \geq 2$.

$$= \langle a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_d b_d a_d^{-1} b_d^{-1} = 1 \rangle$$

Si $H_2 = 0$, la décomposition existe toujours ; la réciproque est fausse.

$H_2(B_d, \varepsilon) \cong \mathbb{C}$



4 générateurs

. Pour le groupe libre, $H_2(\ , \varepsilon) = \{0\}$.

$\longrightarrow$ le 2^e groupe de cohomologie est composé des relations entre les commutateurs du groupe.