

Quelques remarques sur le comportement mathématique et thermo-mécanique des alliages à mémoire de forme

Christian LExcellent DMA-FEMTO Besançon

Séminaire Epiphyamat, Avril 2012

Introduction.

Propriétés spécifiques des AMF: pseudoélasticité, effet mémoire simple , effet mémoire double (éducation) , amortissement .

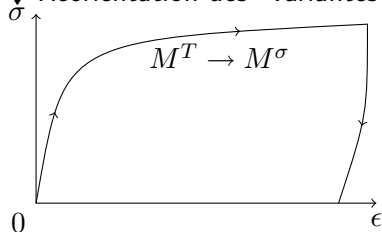
Matériaux à “mémoire” : propriété de se “souvenir”

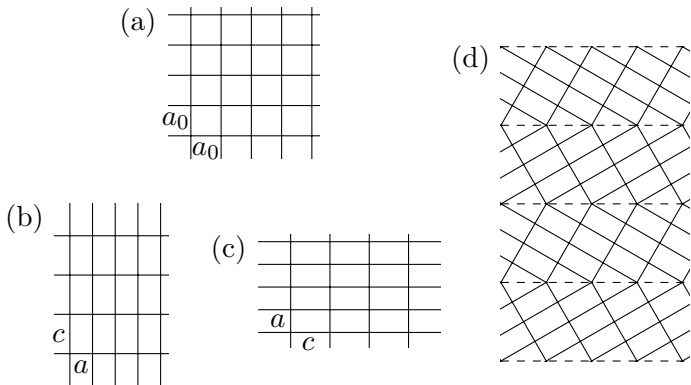
GEOMETRIQUEMENT des traitements thermomécaniques subis (traction , flexion , torsion)

Clé physique : ♦ transformation de phase entre austénite A et martensite

M: changement du réseau cristallin.

♦ Réorientation des “variantes de martensite” sous contrainte





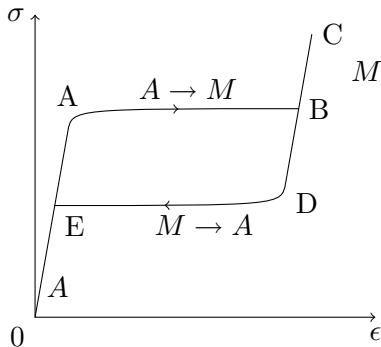
Une illustration schématique de la transformation martensitique : (a) austénite (b,c) variantes de martensite (d) un arrangement cohérent entre variantes de martensite

Une caractéristique observable de la transformation martensitique est la MICROSTRUCTURE qu'elle produit.

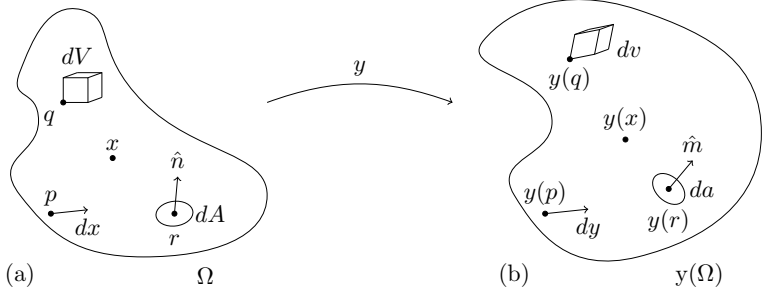
Une austénite, en général cubique centrée, produit ν variantes de martensites avec:

$$\nu = \frac{\text{nombre de rotations en } P_a}{\text{nombre de rotations en } P_m} \quad (1)$$

et $P_a(P_m)$ groupe de symétrie de A (M).



Courbe macroscopique : contrainte déformation- pseudoélastique



Transport du domaine Ω_0 vers le domaine Ω : point, vecteur, surface, volume

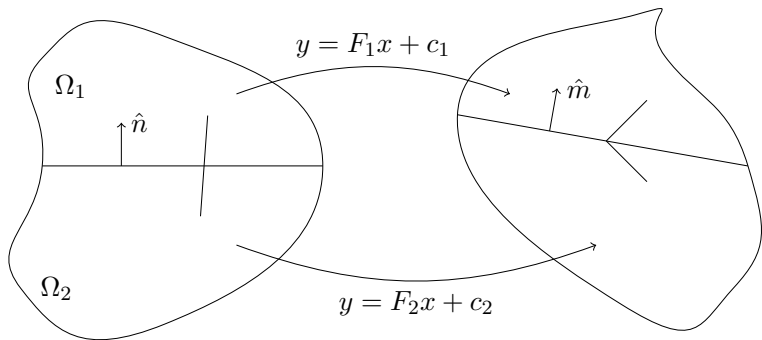


Illustration de la condition de compatibilité cinématique dite d'Hadamard .

Nous nous attachons à un problème crucial de déplacement à l'interface plane Γ entre 2 sous-parties Ω_1 et Ω_2 du corps Ω .

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{F}_1 \mathbf{x} + \mathbf{c}_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \mathbf{F}_2 \mathbf{x} + \mathbf{c}_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} .$$

Soit $\hat{\mathbf{n}}$ un vecteur unitaire normale à la surface plane Γ . La continuité impose

$$\mathbf{x} \in \Gamma : (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \mathbf{x} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 \in \text{image}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \\ \dim(\ker(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)) = 2 \end{array} \right)$$

Si on suppose

alors $\forall \mathbf{x} (\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 \in \text{image}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2), \dim(\ker(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)) = 2)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}) \mathbf{x}}_{\in \Gamma} \Rightarrow \mathbf{F}_i \mathbf{x} = \mathbf{F}_i \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{x} + \mathbf{F}_i (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}) \mathbf{x}, \quad i = 1, 2$$

$$\Rightarrow (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \mathbf{x} = (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{n}}}) \mathbf{x}}_{\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1}$$

i.e.

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \underbrace{P_{\hat{\mathbf{n}}}}_{\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}} + \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$$

$$= \underbrace{(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}^T}_{\mathbf{a}} + \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$$

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$$

Exemple entre 2 variantes d'une maille quadratique:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{U}_1, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{U}_2$$

où

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{Q}\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \beta \cos\theta - \alpha & -\alpha \sin\theta & 0 \\ \beta \sin\theta & \alpha \cos\theta - \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérification des conditions :

$$\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 \in \text{image}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \Rightarrow \mathbf{0} \in \text{image}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \text{ ok toujours}$$

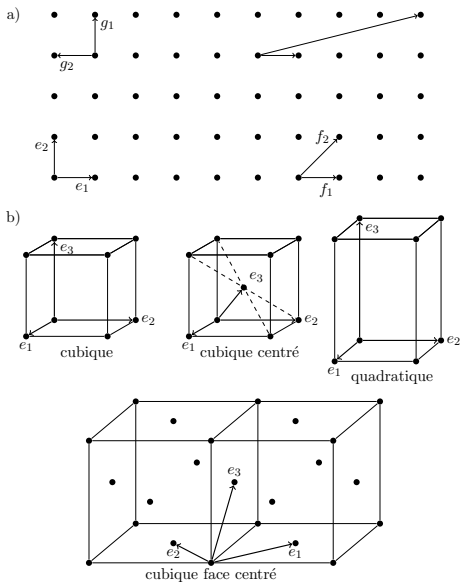
et

$$\dim(\ker(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)) = 2 \Leftrightarrow 3\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2)\cos\theta = 0$$

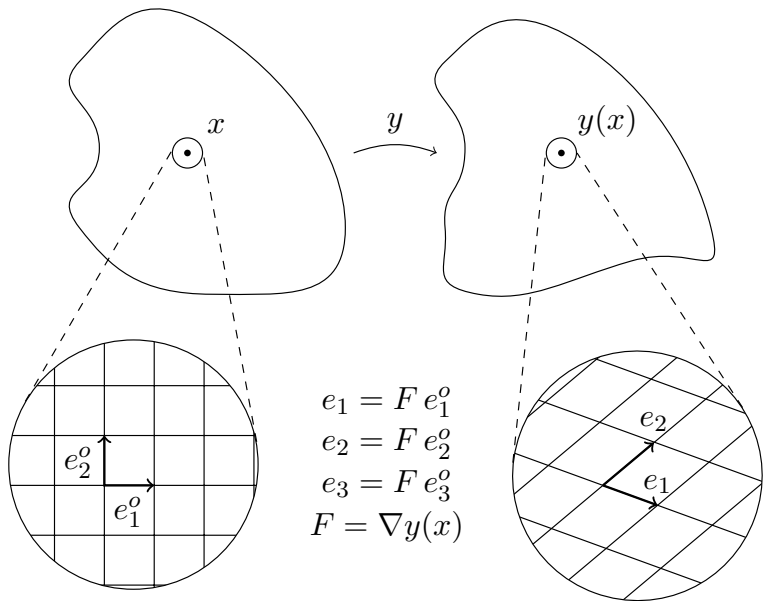
On trouve

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{n}}$$

Réseaux de Bravais



Liens entre les mailles et le milieu continu : l'hypothèse de Cauchy-Born



Transformation martensitique

Introduction

Notre objectif est de développer une théorie continue pour des matériaux sujets à une transformation de phase dite « martensitique ». En particulier, nous cherchons à comprendre la nature de la microstructure qui est observée dans ces matériaux. Pour le moment, nous nous focalisons sur des échantillons monocristallins dans leur état austénitique (phase haute température). Nous allons décrire plusieurs états cristallographiques du matériau. L'énergie totale du matériau, dans Ω , sujet au gradient de transformation $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}$, à la température ϑ , est donnée par

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}, \theta) dV \quad (2)$$

Nous assumons que l'énergie dépend de la distorsion du réseau. Nous postulons que le matériau va être dans un état qui « MINIMISE SON ENERGIE TOTALE ». Spécifiquement, nous allons trouver que cette énergie a de multiples minima appelés « les structures à puits multiples ».

matrice de Bain ou de transformation
Examinons une transformation cristallographique simple entre l'austénite cubique et la martensite quadratique

Soient les vecteurs directeurs du réseau austénitique $\mathbf{e}_1^a, \mathbf{e}_2^a, \mathbf{e}_3^a$ et ceux du réseau martensitique. $\mathbf{e}_1^m, \mathbf{e}_2^m, \mathbf{e}_3^m$

Matrice de Bain

Examinons une transformation cristallographique simple entre l'austénite cubique et la martensite quadratique

Soient les vecteurs directeurs du réseau austénitique $\mathbf{e}_1^a, \mathbf{e}_2^a, \mathbf{e}_3^a$ et ceux du réseau martensitique. $\mathbf{e}_1^m, \mathbf{e}_2^m, \mathbf{e}_3^m$ Dans la description de la transformation du réseau austénitique en réseau martensitique, on peut trouver la matrice \mathbf{U}_1 telle que

$$\mathbf{e}_i^m = \mathbf{U}_1 \mathbf{e}_i^a \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

\mathbf{U}_1 est appelée matrice de Bain : c'est une matrice 3×3 définie positive, les vecteurs des deux réseaux s'écrivent dans R_0 (repère orthonormé associé à la cellule cubique de l'austénite)

$$\mathbf{e}_1^a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -a_0 \\ -a_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -a_0 \\ -a_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

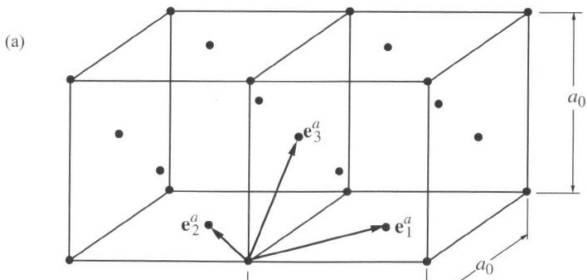
$$\mathbf{e}_1^m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dans R_0 , il est aisé de vérifier que la matrice de transformation est donnée par

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pour cette transformation cristalline, il existe trois variantes de martensite nommées

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (7)$$



Martensite
variant I

\hat{n}

Martensite
variant J

$$\nabla u = Q_1 U_I$$

$$\nabla y = Q_2 U_J$$

Examinons un interface entre deux variantes de martensite (Figure ?? : variante M_i dans Ω_1 et variante M_j dans Ω_2 . Nous cherchons un déplacement tel que

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y} : \begin{cases} \mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_i \text{ dans } \Omega_1 \\ \mathbf{Q}_2 \mathbf{U}_j \text{ dans } \Omega_2 \end{cases} \text{ pour 2 rotations } \mathbf{Q}_1 \text{ et } \mathbf{Q}_2 \quad (8)$$

L'équation de compatibilité doit satisfaire

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{U}_i - \mathbf{Q}_2 \mathbf{U}_j = \mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (9)$$

avec $\hat{\mathbf{n}}$ la normale unitaire à l'interface et \mathbf{b} un vecteur.

En multipliant l'équation précédente par \mathbf{Q}_2^T et en posant $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{a} = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{b}$ on obtient

$$\mathbf{Q} \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (10)$$

Nous appelons cette équation : “équation de jumelage” entre deux martensites i et j ou la « twinning equation ».

Si nous cherchons la solution de cette « twinning equation », la procédure est la suivante (la démonstration a été effectuée par Ball et James 87 et 92 [?][?]) :

RECETTE

1) Calculons la matrice \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = (\mathbf{U}_i \mathbf{U}_j^{-1})^T (\mathbf{U}_i \mathbf{U}_j^{-1})$$

2) Si $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ (matrice identité) l'équation 10 n'a pas de solution.

3) Si $\mathbf{C} \neq \mathbf{1}$, calculons les valeurs propres de la matrice \mathbf{C} .

Automatiquement, $\lambda_i > 0$ et classons-les tel que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$

4) L'équation 10 a une solution si et seulement si, les valeurs propres satisfont

$$\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 \geq 1 \quad (11)$$

5) Si la condition 11 est satisfaite, alors il y a exactement deux solutions données par

$$\mathbf{a} = \rho \left(\sqrt{\frac{\lambda_3(1-\lambda_1)}{\lambda_3-\lambda_1}} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda_3-1)}{\lambda_3-\lambda_1}} \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}} \left(-\sqrt{1-\lambda_1} \mathbf{U}_2^T \hat{\mathbf{e}}_1 + \kappa \sqrt{\lambda_3-1} \mathbf{U}_2^T \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \quad (13)$$

où $\kappa = \pm 1$, $\rho \neq 0$ choisi tel que $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$ et $\hat{\mathbf{e}}_i$ les vecteurs propres unitaires associés aux valeurs propres λ_i ($i = 1, 2, 3$).

MA QUESTION A VOUS DEMONSTRATION ?

Transformation cubique \rightarrow quadratique

Appliquons ceci à la transformation cubique \rightarrow quadratique. Commençons par les variantes 1 et 2.

Les calculs donnent :

Soit \mathbf{R} une matrice de rotation de 180° autour de l'axe $\hat{\mathbf{e}}$ défini par

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Il est facile de vérifier que $\mathbf{R}^T \mathbf{U}_1 \mathbf{R} = \mathbf{U}_2$ et l'on obtient

$$1. \mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2 + \alpha^2} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$2. \mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2 + \alpha^2} \begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Origine de la microstructure

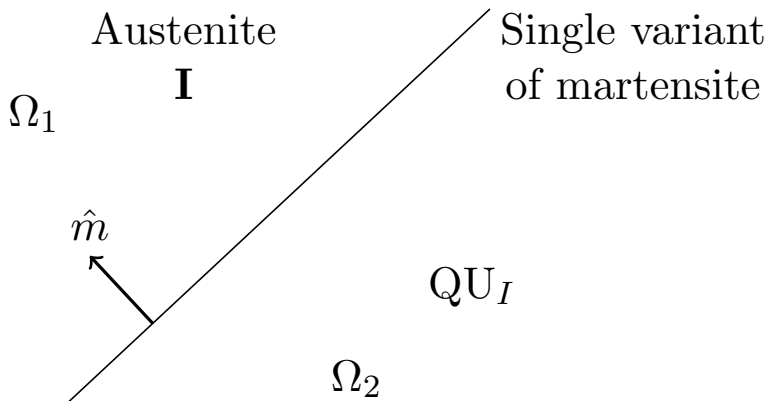
Dans la partie 3.8, nous avons vu que les martensites jumelées (les « twins ») étaient obtenues par la minimisation de l'énergie de déformation. Cependant, il n'est pas usuel de trouver des interfaces M_i/M_j isolés dans le matériau. Les observations montrent que les microstructures sont complexes avec beaucoup d'interfaces.

En fait, les microstructures sont très fines et la taille des domaines très petite. Donc se pose une question : pourquoi une image classique de la martensite constitue t'elle un réseau complexe avec une échelle très fine ? En fait, pourquoi la martensite forme une microstructure ?

L'école de la « Crystallographical Theory of Martensite » alias CTM (Ball, James, Kohn, Bhattacharya. . .) interprète L'EXISTENCE D'UNE MICROSTRUCTURE A UNE ECHELLE TRES FINE, COMME UNE CONSEQUENCE DE LA STRUCTURE A PUIITS MULTIPLES de la densité d'énergie.

Microstructures spéciales

Interface Austénite-Martensite



Un interface exact austenite-martensite

Mettons nous dans la situation la plus simple où un interface plan sépare l'austénite de la i -ème variante de martensite ??.

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1} \text{ dans } \Omega_1 \\ QU_i \text{ dans } \Omega_2 \text{ pour toute rotation } \mathbf{Q} \end{array} \right\} \quad (17)$$

afin que le déplacement soit continu, on doit satisfaire les conditions de compatibilité, c'est-à-dire :

$$\mathbf{QU}_i - \mathbf{1} = \mathbf{b} \otimes \hat{\mathbf{m}} \quad (18)$$

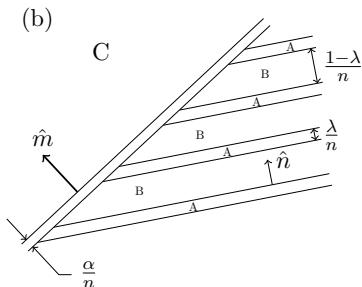
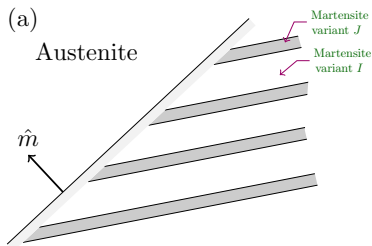
La procédure est absolument identique à l'équation de jumelage entre deux variantes de martensite cf equation 10.

Calculons **C**

$$\mathbf{C} = (\mathbf{Q}\mathbf{U}_i)^T(\mathbf{Q}\mathbf{U}_i) = \mathbf{U}_i\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i^2 \quad (19)$$

C doit avoir trois valeurs propres λ_i telles que :

$$\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 \geq 1$$



Un interface typique entre l'austenite et la martensite.(b)Une séquence de déformations qui décrivent l'interface austenite-martensite.

Cette microstructure schématisée à la figure ?? nous amène à vérifier deux équations bien distinctes.

- L'équation de compatibilité entre les deux variantes I et J

$$\mathbf{Q}\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (20)$$

que nous avons déjà traité.

- l'équation de compatibilité entre l'austenite A et le couple de variantes de martensite M_i/M_j de proportion $(1-\lambda)$ et λ respectivement

$$\mathbf{Q}'(\lambda\mathbf{Q}\mathbf{U}_j - (1-\lambda)\mathbf{U}_i) = \mathbf{1} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{m} \quad (21)$$

Si nous faisons l'hypothèse que l'équation de jumelage des variantes i et j a une solution. . A nouveau Ball et James [?][?] donnent la procédure afin d'obtenir la solution de l'équation de l'interface austenite/martensite.

RECETTE : démonstration ?

1) Calculer

$$\delta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{U}_i (\mathbf{U}_i^2 - 1)^{-1} \hat{\mathbf{n}} \quad (22)$$

et

$$\eta = \text{tr}(\mathbf{U}_i^2) - \det(\mathbf{U}_i^2) - 2 + \frac{\|\mathbf{a}\|^2}{2\delta} \quad (23)$$

L'équation de l'interface austenite-martensite a une solution si et seulement si

$$\delta \leq -2 \text{ et } \eta \geq 0 \quad (24)$$

2) Pour trouver les solutions, calculer

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{\delta}} \right) \quad (25)$$

3) Calculer

$$\mathbf{C} = (\mathbf{U}_i + \lambda \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{U}_i + \lambda \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{a}) \quad (26)$$

Trouver les valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et les vecteurs propres $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ de \mathbf{C} . Automatiquement $\lambda_2 = 1$ et

$$\mathbf{b} = \rho \left(\sqrt{\frac{\lambda_3(1-\lambda_1)}{\lambda_3-\lambda_1}} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda_3-1)}{\lambda_3-\lambda_1}} \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}} \left(-\sqrt{1-\lambda_1} \mathbf{U}_i^T \hat{\mathbf{e}}_1 + \kappa \sqrt{\lambda_3 - 1} \mathbf{U}_i^T \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \quad (28)$$

Pour la transformation austenite cubique \rightarrow martensite quadratique.
En reprenant les matrices de Bain \mathbf{U}_1 et les vecteurs \mathbf{a} et $\hat{\mathbf{n}}$ obtenus par la résolution de l'équation de jumelage. L'équation de l'interface $A/(M_i, M_j)$ a une solution si et seulement si

$$\alpha < 1 < \beta \text{ et } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \leq 2 \quad (29)$$

ou

$$\beta < 1 < \alpha \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 \leq 2 \quad (30)$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2)}{(\beta^2 - \alpha^2)^2}} \right) \quad (31)$$

Les deux solutions avec λ et $(1-\lambda)$ sont données par

$$\mathbf{b}^{\pm} = \rho \frac{1 - \alpha^2}{1 + \beta^2} \begin{bmatrix} \mp \frac{\delta + \tau}{2} \\ \pm \frac{\delta - \tau}{2} \\ -\beta \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{m}}^{\pm} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \mp \frac{\delta + \tau}{2} \\ \pm \frac{\delta - \tau}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

où

$$\delta = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2}{1 - \alpha^2}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2}{1 - \alpha^2}} \quad (33)$$

les modèles phénoménologiques à variables internes régissant le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme.

Ces modèles sont construits dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (T.P.I.) appliquée aux matériaux standards généralisés par Bernard Halphen et N'Guyen Quoc Son
les premiers modèles , disons empiriques , sont ceux de Tanaka

$$\Sigma = E^{\star}(E - E^{tr} - E^{th}) = E^{\star}(E - \gamma z - \alpha(T - T_0)) = E^{\star}(E^{el}) \quad (34)$$

avec des cinétiques de transformation de phase en “lois exponentielles”

Pour $A \Rightarrow M$

$$z = 1 - \exp(a_1 \langle \Sigma - b_1(T - M_S^0) \rangle) \quad (35)$$

Pour $M \Rightarrow A$

$$z = \exp(-a_2 \langle b_2(T - A_S^0) - \Sigma \rangle) \quad (36)$$

Modèle R_L

L'énergie libre du mélange biphasé ($A + M$) peut être définie par

$$\psi(\mathbf{E}, T, z) = (1 - z)\psi_A(\mathbf{E}_A, T) + z\psi_M(\mathbf{E}_M, T) + \psi_{int}(z, T) \quad (37)$$

Modèle R comme réversible

Dans ce cas avec $\psi_{int}(z, T) = 0$, l'énergie libre devient

$$\psi(\mathbf{E}, T, z) = (1-z)\psi_A(\mathbf{E}_A, T) + z\psi_M(\mathbf{E}_M, T) \quad (38)$$

Soit l'énergie libre de la phase α

$$\begin{aligned} \rho \psi^\alpha(\mathbf{E}_\alpha, T) = & u_\alpha^0 - Ts_\alpha^0 + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha - \mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}} - \mathbf{E}_\alpha^{\text{th}})\mathbf{L}(\mathbf{E}_\alpha - \mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}} - \mathbf{E}_\alpha^{\text{th}}) \\ & + C_v(T - T_0 - Ln(\frac{T}{T_0})) \quad (39) \end{aligned}$$

$\alpha = 1$ pour l'austénite et $\alpha = 2$ pour la martensite

$$\mathbf{E}_\alpha^{\text{th}} = \mathbf{E}_1^{\text{th}} = \mathbf{E}_2^{\text{th}} = \mathbf{E}^{\text{th}} = \alpha(T - T_0)\mathbf{1} \quad (40)$$

Par définition

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \rho \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{E}_\alpha} = \mathbf{L}(\mathbf{E}_\alpha - \mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}} - \mathbf{E}_\alpha^{\text{th}}) = \mathbf{L}\mathbf{E}_\alpha^{\text{el}} \quad (41)$$

ou :

\mathbf{E}_α représente la déformation totale de la phase α

$\mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}}$ représente la déformation de transformation associée à la phase α

$\mathbf{E}_\alpha^{\text{th}}$ représente la déformation thermique de la phase α

$\mathbf{E}_\alpha^{\text{el}}$ représente la déformation élastique de la phase α

2ième hypothèse :

$$\mathbf{E}_1^{\text{tr}} = 0, \mathbf{E}_2^{\text{tr}} = \kappa$$

3ième hypothèse

On applique la loi des mélanges sur la déformation totale

$$\mathbf{E} = (1 - z)\mathbf{E}_1 + z\mathbf{E}_2 \quad (42)$$

avec

$$\mathbf{E}_\alpha = (\mathbf{E}_\alpha^{\text{el}} + \mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}} + \mathbf{E}_\alpha^{\text{th}})$$

4ⁱème hypothèse :

L'état de contrainte est indifférent à l'état de phase, c'est à dire

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma} \Rightarrow \mathbf{E}_\alpha^{\text{el}} = \mathbf{E}_1^{\text{el}} = \mathbf{E}_2^{\text{el}} = \mathbf{E}^{\text{el}} \quad (43)$$

et

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{el}} + \kappa z + \alpha(T - T_0)\mathbf{1} \quad (44)$$

L'énergie libre du mélange biphasé ($A + M$) s'écrit

$$\rho \psi(\mathbf{E}, z, T) = u_1^0 - Ts_1^0 - z\Pi_0^f(T) + \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \kappa z - \alpha(T - T_0)\mathbf{1})\mathbf{L}(\mathbf{E} - \kappa z - \alpha(T - T_0)\mathbf{1}) \quad (45)$$

$$+ C_v(T - T_0 - Ln(\frac{T}{T_0})) \quad (46)$$

avec

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{L}(\mathbf{E} - \kappa z - \alpha(T - T_0)\mathbf{1}); s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (47)$$

s constitue l'entropie spécifique et $\Pi_0^f(T) = \Delta u - T\Delta s$

avec $\Delta u = u_1^0 - u_2^0; \Delta s = s_1^0 - s_2^0$

L'incrément de dissipation d'origine mécanique (en référence au chapitre 4) s'écrit

$$dD = \Pi^f dz \geq 0 \quad (48)$$

avec

$$\Pi^f(\boldsymbol{\Sigma}, z, T) = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \Pi_0^f(T) + \frac{\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{\Sigma}}{\rho} \quad (49)$$

ou

$$\Pi^f(\mathbf{E}, z, T) = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \Pi_0^f(T) + \frac{\boldsymbol{\kappa} : \mathbf{L}(\mathbf{E} - \boldsymbol{\kappa}z - \boldsymbol{\alpha}(T - T_0)\mathbf{1})}{\rho} \quad (50)$$

Un modèle réversible (thermodynamiquement) comme R signifie que la dissipation est nulle et par conséquent, pendant la transformation de phase directe ou inverse $\forall dz; z \in [0, 1]$

$$\Pi^f(\mathbf{\Sigma}, z, T) = 0; \Pi^f(\mathbf{E}, z, T) = 0 \quad (51)$$

1ere application : chargement uniaxial

Dans ce cas, on peut réduire κ à un scalaire γ et la contrainte seuil s'écrit

$$\Sigma^{am} = -\rho \frac{\Pi_0^f(T)}{\gamma} \quad (52)$$

FIG

Dans le diagramme de Clausius-Clapeyron (Σ, T) , on peut déduire la pente de séparation entre les domaines austénitique et martensitique.

$$\frac{d\Sigma^{am}}{dT} = \rho \frac{\Delta s}{\gamma} \quad (53)$$

FIG

La déformation de début de transformation de phase $E^{am}(z=0)$ est régie par $E^{am}(z=0) = \Sigma^{am}/E$ et en fin de transformation $E^{am}(z=1) = \Sigma^{am}/E + \gamma$ et enfin une déformation intermédiaire $E^{am}(z) = \Sigma^{am}/E + \gamma z$.

Ce modèle simple est particulièrement bien adaptée à la description des monocristaux à faible hystérésis tels que le Cu-Zn-Al [?]

Modèle R_L comme avec boucle d'hystérésis("loop") [?]

Dans ce cas , l'énergie libre s'écrit

$$\rho \psi(\mathbf{E}, z, T) = u_1^0 - Ts_1^0 - z\Pi_0^f(T) + \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \kappa z - \alpha(T - T_0)\mathbf{1})\mathbf{L}(\mathbf{E} - \kappa z - \alpha(T - T_0)\mathbf{1}) + \quad (54)$$

$$C_v(T - T_0 - Ln(\frac{T}{T_0})) + \psi_{int}(z, T) \quad (55)$$

avec

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{L}(\mathbf{E} - \kappa z - \alpha(T - T_0)\mathbf{1}); s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (56)$$

Comme nous le montrerons par la suite, le choix du tenseur κ est tout à fait important quant à la modélisation d'essais multiaxiaux (prise en compte de la dissymétrie entre la traction et la compression , par exemple) .Celui de $\psi_{int}(z, T)$ s'avère décisif concernant la dissipation et l'hystérésis . Un raisonnement logique consiste à statuer qu'il n'y a pas d'interaction quand une seule des deux phases est présente (c'est un peu oublier que la phase martensitique " en passant" dans la phase mère a pu laisser des traces!). En tout cas , on écrit

$$\psi_{int}(z = 0) = \psi_{int}(z = 1) = 0 \quad (57)$$

Donc, un choix naturel a été effectué en premier par Muller[?] et par Muller et Xu [?] dans leur théorie unidimensionnelle de formation des boucles d'hystérésis due à la transformation de phase

$$\psi_{int}(z, T) = Az(1 - z) \quad (58)$$

Raniecki et col.[?] ont remplacé la constante A par $\psi_{it}(T) = u_0 - Ts_0$. Cela renvoie aux considérations de Licht intitulée "z(1-z) , j'aime assez" [?].

On peut aussi identifier l'expression mathématique de $\psi_{int}(z, T)$ grâce à la détermination de paramètres sur les courbes expérimentales hystérétiques de traction , par exemple , comme l'a esquissé Boubakar dans son Habilitation à Diriger des Recherches [bou]. Cela peut être effectué dans le cadre des transformations finies[?].

En référence au modèle R , ici la dissipation existe
Ici

$$dD = \Pi^f dz \geq 0 \quad (59)$$

avec

$$\Pi^f(\boldsymbol{\Sigma}, z, T) = \Pi_0^f(T) + \frac{\boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{\Sigma}}{\rho} - (1 - 2z)\psi_{it}(T) \quad (60)$$

Le tenseur des contraintes Σ^{am} seuil de début de la transformation directe $A \Rightarrow M$ est géré par

$$\Pi^f(\Sigma^{am}, z = 0, T) = \Pi_0^f(T) + \frac{\kappa : \Sigma^{am}}{\rho} - \psi_{it}(T) = 0 \quad (61)$$

et le Le tenseur des contraintes Σ^{ma} seuil de début de la transformation inverse $M \Rightarrow A$ est géré par

$$\Pi^f(\Sigma^{ma}, z = 1, T) = \Pi_0^f(T) + \frac{\kappa : \Sigma^{ma}}{\rho} + \psi_{it}(T) = 0 \quad (62)$$

La transformation directe $A \Rightarrow M$ a lieu quand $dz > 0 \Rightarrow \Pi^f \geq 0$ et la transformation inverse $M \Rightarrow A$ quand $dz < 0 \Rightarrow \Pi^f \leq 0$.

Afin de spécifier les équations des cinétiques de transformation de phase, nous faisons l'hypothèse qu'il existe deux fonctions $\phi_\alpha(\Pi^f, z)$ ($\alpha = 1, 2$) tel qu'un processus actif de décomposition de la phase mère ($dz > 0$ $A \Rightarrow M$) ne peut avoir lieu que si $\phi_1 = const.$ ($d\phi_1 = 0$). De même un processus actif de décomposition de la martensite ($dz < 0$ $M \Rightarrow A$) ne peut progresser que si $\phi_2 = cont.$ ($d\phi_2 = 0$).

$$\phi_1 = \Pi^f - k_1(z), \quad \phi_2 = -\Pi^f + k_2(z) \quad (63)$$

Afin d'être en accord avec les métallurgistes comme Koistinen et Marburger [?] pour l'expression des cinétiques de transformations de phase , on choisit

$$k_1(z) = 2\psi_{it}(M_s^0)z + \frac{s_0 - \Delta s - 2s_0z}{a_1} \text{Ln}(1-z) \quad (64)$$

$$k_2(z) = 2\psi_{it}(A_s^0)(1-z) + \frac{s_0 + \Delta s - 2s_0(1-z)}{a_1} \text{Ln}(z) \quad (65)$$

Ainsi, des calculs laborieux délivrent les cinétiques des transformations directe et inverse

$$d\phi_1 = 0 \Rightarrow dz^{a \rightarrow m} \quad (66)$$

$$d\phi_2 = 0 \Rightarrow dz^{m \rightarrow a} \quad (67)$$

La taille d'hystérésis se définit en 1D (traction simple par exemple) par

$$\Delta \Sigma = \Sigma^{am} - \Sigma^{ma} \quad (68)$$

Notons que dans ce cas $\kappa : \Sigma = \gamma \Sigma$ ou est Σ est la contrainte de traction et γ la déformation de transformation complète avec Σ^{am} tel que $\Pi^f(\Sigma^{am}, z = 0, T) = 0$ ce qui entraîne

$$\Sigma^{am} = \frac{\rho}{\gamma} (-\Pi_0^f(T) + \psi_{it}(T)) \quad (69)$$

De même Σ^{ma} tel que $\Pi^f(\Sigma^{ma}, z = 1, T) = 0$ ce qui entraîne

$$\Sigma^{ma} = \frac{\rho}{\gamma} (-\Pi_0^f(T) - \psi_{it}(T)) \quad (70)$$

On obtient

$$\Delta \Sigma = \Sigma^{am} - \Sigma^{ma} = \frac{\rho}{\gamma} 2\psi_{it}(T) \quad (71)$$

Comportement isotherme multiaxial

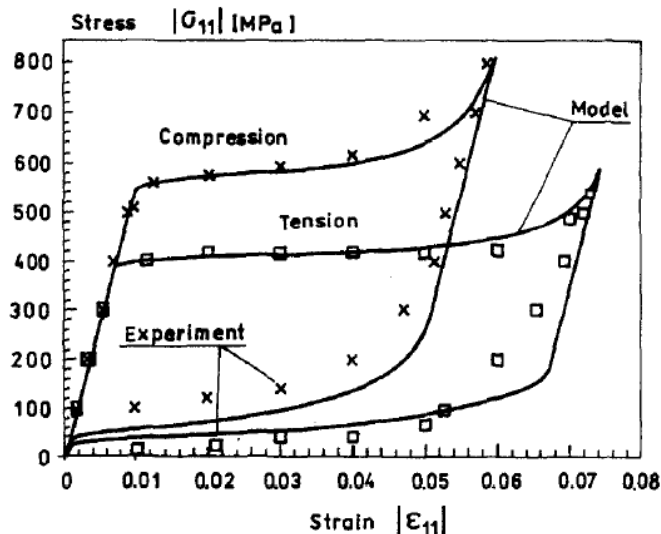


FIG.: Courbe pseudoélastique en traction-compression du Ni-Ti : expériences de Orgéas et Favier, modélisation de Raniecki et Lexcelent[?, ?]

- a) la contrainte seuil de début de transformation en traction Σ_T^{am} est inférieure en module à celle mesurée en compression Σ_C^{am}
- b) la déformation de transformation de phase associée à la traction γ_T est supérieure à celle obtenue en compression γ_C . Cependant, les énergies en traction et en compression sont égales i.e.

$$\Sigma_T^{am} \gamma_T = \Sigma_C^{am} \gamma_C = C(T) \quad (72)$$

- c) Comme les contraintes seuils Σ_T^{am} et Σ_C^{am} sont des fonctions linéaires de la température, il vient comme cela est montré sur la figure 2 que

$$-\frac{d\Sigma_C^{am}}{dT} > \frac{d\Sigma_T^{am}}{dT} \quad (73)$$

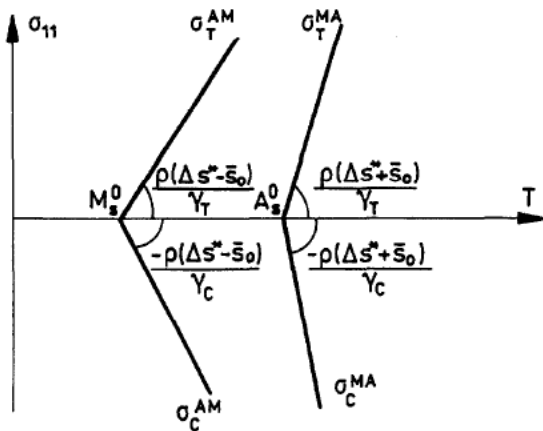


FIG.: Diagramme de Clapeyron en traction compression : illustration schématique

- d) l'épaisseur d'hystérésis obtenue en compression est plus grande que celle obtenue en traction (figure 1) .
- e) le comportement observé en cisaillement pur est symétrique (cf. figure 3) .

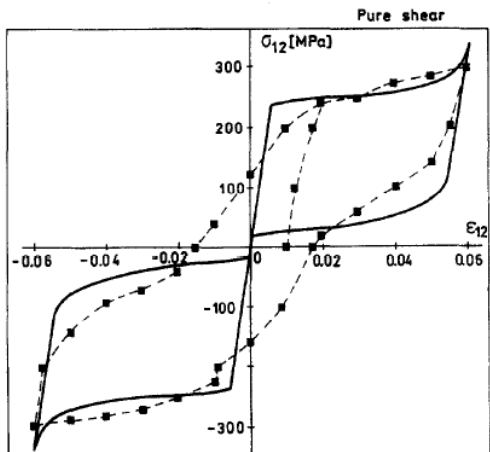


FIG.: boucle d'hysteresis en cisaillement pur :expérience de Orgéas et Favier[?]

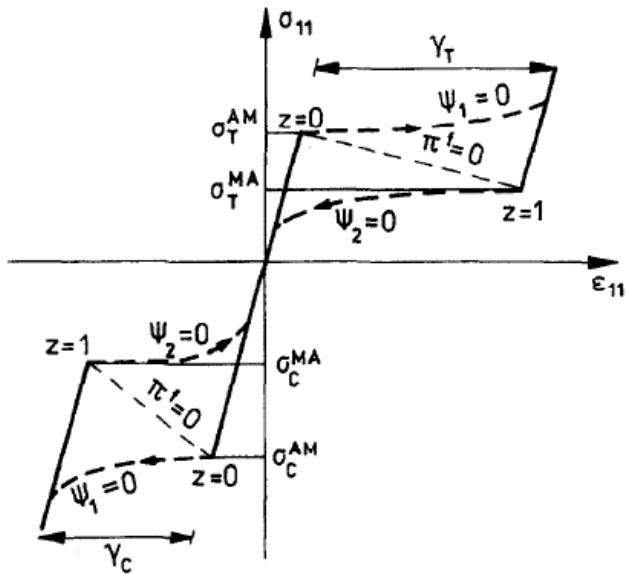


FIG.: Illustration théorique de la boucle pseudoélastique en traction- compression

Maintenant, tout le problème est de donner une forme acceptable à $g^*(\boldsymbol{\Sigma})$. Pour ce faire, les outils adéquats sont suggérés par la plasticité. Comme le comportement du milieu biphasé est isotrope et que κ ne dépend pas de la pression hydrostatique, nous suggérons d'écrire $g^*(\boldsymbol{\Sigma})$ sous la forme

...

$$\rho g^*(\boldsymbol{\Sigma}) = \gamma \bar{\Sigma} g(y_{\Sigma}) \quad (74)$$

avec $g(y_{\Sigma} = 0) = 1$

Si $\mathbf{S} = \text{dev}(\boldsymbol{\Sigma})$ est le deviateur des contraintes, alors

$$\bar{\Sigma} = \left(\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (75)$$

correspond à la contrainte équivalente de Huber-Von Mises

y_{Σ} est fonction de $\bar{\Sigma}$ et du troisième invariant du tenseur déviateur des contraintes $J'_3 = \det(\mathbf{S})$ et est choisi sous forme adimensionnelle

$$y_{\Sigma} = \frac{27 \det(\mathbf{S})}{2 \bar{\Sigma}^3} \quad (76)$$

avec $-1 \leq y_{\Sigma} \leq 1$

Le choix de $g(y_{\Sigma})$ est ouvert mais il doit garantir la convexité du domaine élastique de l'austénite.

C'est l'introduction du troisième invariant qui permettra de prendre en compte la dissymétrie entre la traction et la compression comme l'ont déjà fait Gillet et al. [?]

Par dérivation de $\rho g^*(\boldsymbol{\Sigma}) = \gamma \bar{\Sigma} g(y_{\Sigma})$ versus $\boldsymbol{\Sigma}$, on obtient

$$\boldsymbol{\kappa} = \bar{\boldsymbol{\kappa}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} \quad (77)$$

avec

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} g(y_{\Sigma}) \mathbf{N} \quad (78)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} = \gamma \sqrt{6} \frac{dg(y_{\Sigma})}{dy_{\Sigma}} (\sqrt{6}(\mathbf{N}^2 - \mathbf{1}/3) - y_{\Sigma} \mathbf{N}) \quad (79)$$

$$\text{et } \mathbf{N} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{S}}{\Sigma}$$

On obtient la déformation de transformation équivalente

$$\bar{\mathbf{E}}^{tr} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{E}^{tr} : \mathbf{E}^{tr} = z\bar{\gamma}(y_{\Sigma}) \quad (80)$$

avec

$$\bar{\gamma}(y_{\Sigma}) = \gamma \sqrt{(g(y_{\Sigma}))^2 + 9(1 - y_{\Sigma}^2) \left(\frac{dg(y_{\Sigma})}{dy_{\Sigma}}\right)^2} \quad (81)$$

Nous avons choisi deux fonctions $g(y_{\Sigma})$

i) la première linéaire en y_{Σ}

$$g(y_{\Sigma}) = 1 + ay_{\Sigma} \quad (82)$$

qui garantit la convexité de $g^*(\boldsymbol{\Sigma})$ si et seulement si $0 \leq a \leq 1/8$

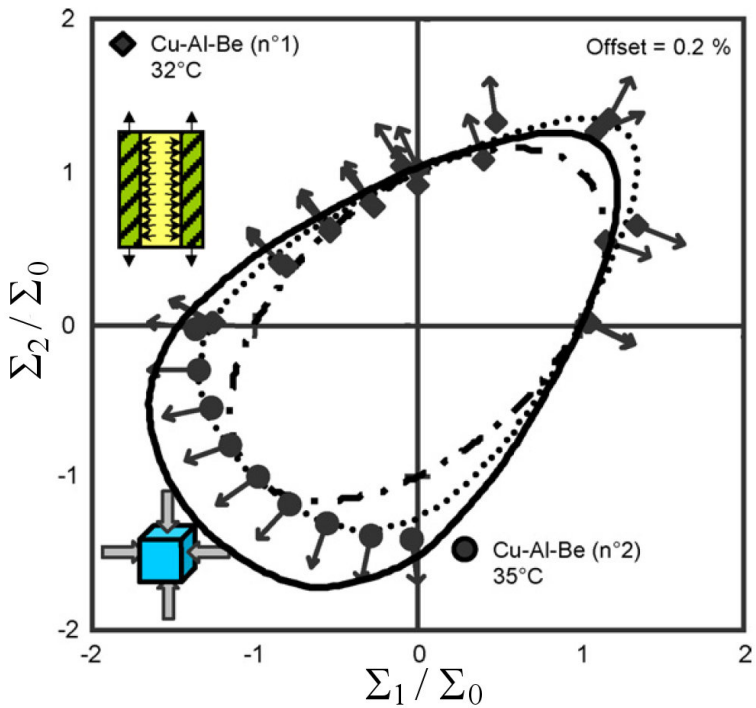
ii) la deuxième sous forme $\cos(\arccos)$ introduite par Bouvet et al.[?]

$$g(y_{\Sigma}) = \cos(1/3 \arccos(1 - a(1 - y_{\Sigma}))) \quad (83)$$

qui garantit la convexité de $g^*(\boldsymbol{\Sigma})$ si et seulement si $0 \leq a \leq 1$

Les surfaces de début de transformation de phase peuvent être obtenues par

$$\rho g^*(\Sigma^{\text{am}}(z=0)) = b(T - M_s^0) \quad (84)$$



Extension anisotherme

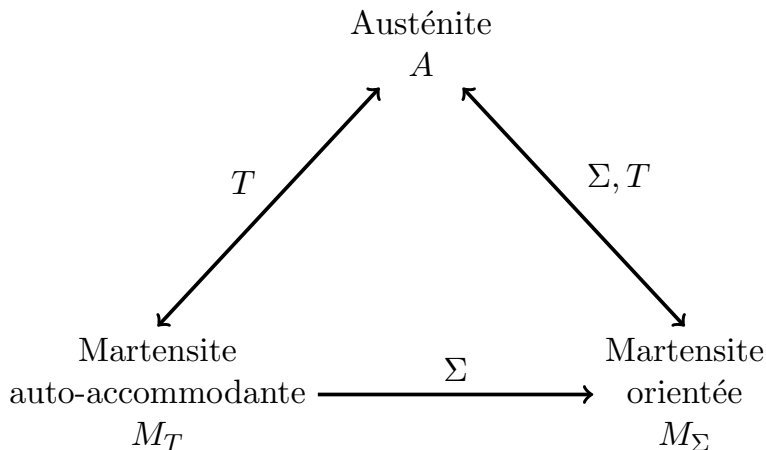


FIG.: Transformation de phase possibles (T :température ; Σ contrainte)

L'énergie libre d'Helmholtz du système "triphase" s'écrit

$$\psi(\mathbf{E}, T, z_T, z_\Sigma) = (1 - z)\psi^{(1)} + z_T\psi^{(2)} + z_\Sigma\psi^{(3)} + \Delta\psi \quad (85)$$

avec $\alpha = 1$ pour l'austénite A , $\alpha = 2$ pour M_T et $\alpha = 3$ pour M_Σ et

$$z = z_T + z_\Sigma \quad (86)$$

ou z représente la fraction volumique globale de martensite (($1-z$) celle de l'austénite) . z se partitionne en z_T fraction volumique de martensite autoaccommodante M_T et en z_Σ fraction volumique de martensite orientée M_Σ .

Une expression "raisonnable" de $\Delta\psi$ prenant en compte l'interaction entre l'austénite et la martensite d'une part et celles entre les deux martensites M_T et M_Σ s'écrit

$$\Delta\psi = z(1 - z)\psi_{it} + z_T z_\Sigma \psi_{it}^m \quad (87)$$

ou ψ_{it} et ψ_{it}^m sont considérées comme des constantes .

$$\rho \psi^\alpha(\mathbf{E}_\alpha, T) = u_\alpha^0 - Ts_\alpha^0 + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_\alpha - \mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}} - \mathbf{E}_\alpha^{\text{th}})\mathbf{L}(\mathbf{E}_\alpha - \mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}} - \mathbf{E}_\alpha^{\text{th}}) + \quad (88)$$

$$C_v(T - T_0 - Ln(\frac{T}{T_0})) \quad (89)$$

avec

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \rho \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \mathbf{E}_\alpha} = \mathbf{L}(\mathbf{E}_\alpha - \mathbf{E}_\alpha^{\text{tr}} - \mathbf{E}_\alpha^{\text{th}}) = \mathbf{L}\mathbf{E}_\alpha^{\text{el}} \quad (90)$$

1ere hypothèse

$$\mathbf{E}_\alpha^{\text{th}} = \mathbf{E}_1^{\text{th}} = \mathbf{E}_2^{\text{th}} = \mathbf{E}_3^{\text{th}} = \mathbf{E}^{\text{th}} = \alpha(T - T_0)\mathbf{1} \quad (91)$$

2ième hypothèse

$$\mathbf{E}_1^{\text{tr}} = \mathbf{E}_2^{\text{tr}} = 0, \mathbf{E}_3^{\text{tr}} = \kappa \quad (92)$$

3ième hypothèse

$$\mathbf{E} = (1 - z)\mathbf{E}_1 + z_T \mathbf{E}_2 + z \cdot \mathbf{E}_3 \quad (93)$$

4ième hypothèse : l'état de contrainte est indifférent à l'état de phase

$$\Sigma_\alpha = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma \Rightarrow \mathbf{E}_\alpha^{\text{el}} = \mathbf{E}_1^{\text{el}} = \mathbf{E}_2^{\text{el}} = \mathbf{E}_3^{\text{el}} = \mathbf{E}^{\text{el}} \quad (94)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{el}} + \kappa z_\Sigma + \alpha(T - T_0)\mathbf{1} \quad (95)$$

et une 5ième hypothèse naturelle car les deux martensites sont les mêmes chimiquement à savoir $u_0^2 = u_0^3$ et $s_0^2 = s_0^3$ ce qui donne l'expression de l'énergie libre

$$\rho \psi(\mathbf{E}, z, T) = u_1^0 - Ts_1^0 - z\Pi_0^f(T) + \quad (96)$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} - \kappa z \boldsymbol{\Sigma} - \alpha(T - T_0)\mathbf{1})\mathbf{L}(\mathbf{E} - \kappa z \boldsymbol{\Sigma} - \alpha(T - T_0)\mathbf{1}) + \quad (97)$$

$$C_v(T - T_0 - Ln(\frac{T}{T_0})) + z(1 - z)\psi_{it} + z_T z \boldsymbol{\Sigma} \psi_{it}^m \quad (98)$$

avec

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{L}(\mathbf{E} - \kappa z \boldsymbol{\Sigma} - \alpha(T - T_0)\mathbf{1}); s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (99)$$

et les forces thermodynamiques associées aux variables internes

$$\Pi_{\Sigma}^f(\mathbf{\Sigma}, z, z_T, T) = -\frac{\partial \psi}{\partial z_{\Sigma}} = \Pi_0^f(T) + \frac{\kappa : \mathbf{\Sigma}}{\rho} - (1 - 2z)\psi_{it}(T) - z_T \psi_{it}^m$$

$$\Pi_T^f(\mathbf{\Sigma}, z, z_{\Sigma}, T) = -\frac{\partial \psi}{\partial z_T} = \Pi_0^f(T) - (1 - 2z)\psi_{it}(T) - z_{\Sigma} \psi_{it}^m$$

En référence au chapitre 4 , la dissipation d'origine mécanique s'écrit

$$dD = \Pi_{\Sigma}^f dz_{\Sigma} + \Pi_T^f dz_T \geq 0 \quad (100)$$

Dans le cas particulier de la réorientation c'est à dire $M_T \Rightarrow M_\Sigma$, on a

$$dz = 0 \implies dz_T = -dz_\Sigma \quad (101)$$

et le terme de dissipation mécanique s'écrit alors

$$\Pi_{T\Sigma}^f dz_\Sigma \geq 0 \quad (102)$$

avec

$$\Pi_{T\Sigma}^f = \Pi_\Sigma^f - \Pi_T^f = \frac{\kappa : \Sigma}{\rho} - (z_T - z_\Sigma) \psi_{it}^m \quad (103)$$

Pour tout processus thermomécanique dans le champ (Σ, \mathbf{E}, T) , l'inégalité de Clausius-Duhem doit être strictement vérifiée.

On considère comme précédemment que pour les processus de transformation de phases, c'est le passage par 0 de la force thermodynamique associée qui constituera le critère de début, par exemple $A \iff M_\Sigma$ correspond à $\Pi_\Sigma^f = 0$ ou $A \iff M_T$ correspond à $\Pi_T^f = 0$

Cinétiques des transformations de phase ou de la réorientation

Comme nous venons de le voir , l'explicitation de l'énergie libre permet de déterminer les équations d'état ainsi que les forces thermodynamiques associées à chaque variable interne . Cependant , cette donnée ne suffit pour décrire un processus dissipatif . Par conséquent , il n'existe pas de relations thermodynamiques découlant de l'énergie libre permettant d'explicitier les cinétiques des fractions volumiques z_{Σ} et z_T .

Pour tout système dissipatif , les équations manquantes peuvent être obtenues en introduisant une fonction thermodynamique complémentaire , soit un pseudo-potentiel de dissipation [?] , [?] ou des fonctions critères comme en élastoplasticité [?] . Nous supposons l'existence de cinq fonctions critères Φ_{Σ}^F , Φ_{Σ}^R , Φ_T^F , Φ_T^R et $\Phi_{T\Sigma}$ relatives à la transformation directe : $F : A \Rightarrow M_{\Sigma}$, $A \Rightarrow M_T$ et inverse $R : M_{\Sigma} \Rightarrow A$, $M_T \Rightarrow A$ et à la réorientation des plaquettes de martensite $M_T \Rightarrow M_{\Sigma}$.

Dans un formalisme identique à celui de la plasticité , ces fonctions Φ sont constantes pendant la transformation de phase qui leur est associée , elles sont données par

$$\Phi_{\Sigma}^F = \Pi_{\Sigma}^f - k_{\Sigma}^F = Y_{\Sigma}^F \quad (104)$$

$$\Phi_{\Sigma}^R = -\Pi_{\Sigma}^f + k_{\Sigma}^R = Y_{\Sigma}^R \quad (105)$$

$$\Phi_T^F = \Pi_T^f - k_T^F = Y_T^F \quad (106)$$

$$\Phi_T^R = -\Pi_T^f + k_T^R = Y_T^R \quad (107)$$

$$\Phi_{T\Sigma} = \Pi_{T\Sigma}^f - k_{T\Sigma} = Y_{T\Sigma} \quad (108)$$

Y_{α}^F , Y_{α}^R et $Y_{T\Sigma}$ ($\alpha = \Sigma$ ou T) sont des constantes non négatives et k_{α}^F , k_{α}^R et $k_{T\Sigma}$ [?] sont des fonctions qui ont la propriété d'être nulles au début de la transformation de phase (directe ou inverse) ou pendant la réorientation

Les équations de cohérence $d\Phi_\alpha^F=0$, $d\Phi_\alpha^R=0$, $d\Phi_{T\Sigma}=0$ permettent d'obtenir les expression de dz_Σ et de dz_T .le choix des fonctions k_α^F k_α^R et $k_{T\Sigma}$ est tel que l'on retrouve les cinétiques classiques des métallurgistes [?]

$$dz_\Sigma = (1 - z_\Sigma) \left[\frac{\gamma a_\Sigma^F}{\rho \Delta s} d\Sigma_{ef} - a_\Sigma^F b_\Sigma^F (\exp(-b^F (T - M_S^0))) dT \right] \text{ pour } A \Rightarrow M_\Sigma \quad (109)$$

$$dz_T = (1 - z_T) a_T^F dz_T \text{ pour } A \Rightarrow M_T \quad (110)$$

$$dz_\Sigma = (1 - z_\Sigma) \frac{\gamma a_{T\Sigma}}{\rho \Delta s} d\Sigma_{ef} \text{ pour } M_T \Rightarrow M_\Sigma \quad (111)$$

avec $\Sigma_{ef} = \bar{\Sigma} g(y_\Sigma)$ qui est la contrainte effective

Concernant la transformation de phase inverse : $M_{\Sigma} \Rightarrow A$, $M_T \Rightarrow A$, une fonction critère unique peut être construite dans le plan du déviateur des contraintes pour tout chargement proportionnel ou radial [?]

$$\Phi_{\Sigma}^R = -\Sigma_{ef} + \Sigma_0^{ma}(z_{\Sigma}, z_T, T) \quad (112)$$

Σ_0^{ma} étant la contrainte seuil associée à la transformation inverse $M_{\Sigma} \Rightarrow A$.

L'utilisation du principe de dissipation maximale dans le but d'obtenir les lois comainte seuil de début de transformation en traction Σ_T^{am} est inférieure en module à celle plémentaires , c'est à dire les cinétiques , requiert un domaine élastique convexe afin d'assurer son unicité .Cependant , dans le cas de la transformation inverse , ce domaine élastique n'est pas convexe , ce qui suggère la construction d'un cadre constitutif "non-associé" en se servant d'une fonction $\chi(\mathbf{\Sigma}, z, z_\Sigma, T)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{\Sigma}, z, z_\Sigma, T) &< 0 \text{ quand } \Phi_\Sigma^R(\mathbf{\Sigma}, z, z_\Sigma, T) < 0 \\ \chi(\mathbf{\Sigma}, z, z_\Sigma, T) &= 0 \text{ quand } \Phi_\Sigma^R(\mathbf{\Sigma}, z, z_\Sigma, T) = 0 \end{aligned} \quad (113)$$

Une telle fonction peut être choisie ainsi

$$\chi(\Sigma, z, z_\Sigma, T) = -\Sigma : \frac{\mathbf{E}^{tr}}{E_{ef}^{tr}} + \Sigma_0^{ma}(z_\Sigma, z_T, T) \quad (114)$$

avec $E_{ef}^{tr} = \gamma z_\Sigma$ et ainsi

$$\frac{d\mathbf{E}^{tr}}{dt} = \gamma \frac{dz_\Sigma}{dt} \frac{\mathbf{E}^{tr}}{E_{ef}^{tr}} \text{ i.e. } \kappa = \rho \frac{\partial}{\partial \Sigma} \left(-\frac{\gamma}{\rho} \chi \right) \text{ et } \mathbf{E}^{tr} = \kappa z_\Sigma \quad (115)$$

Comme précédemment, dz_Σ dérive de la condition de cohérence $d\Phi_\Sigma^R = 0$

$$dz_\Sigma = z_\Sigma \left[\frac{\gamma a_\Sigma^R}{\rho \Delta s} d\Sigma_{ef} - a_\Sigma^R b_\Sigma^R (\exp(-b^R(T - M_S^0))) dT \right] \text{ pour } M_\Sigma \Rightarrow A \quad (116)$$

La condition $d\Phi_T^R = 0$ permet d'obtenir dz_T

$$dz_T = -a_T^R z_T dT \quad (117)$$

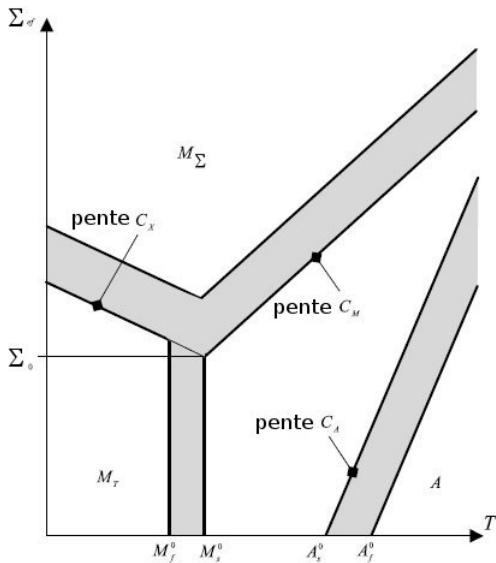


FIG.: Diagramme de Clausius-Clapeyron dans le plan de la contrainte effective-température)