Épiphymaths
Jean Merker
14/12/2013

objet individuel en MQ (3)

Système ouvert $\neq$ système isolé.
= ouvert vers l'extérieur

Postulat de projection : utilisé en permanence.

↳ pose problème : on parle de mesure, qui a pour effet de projeter.
mais pourquoi ? C'est hors compréhension.

Effet Zénon quantique.

Il y a un protocole de production d'état : cela donne une moyenne.

Daniel : "proba", "stats" ont des sens différents en anglais et en français.
↳ donc, de manière expérimentale, on définit

$$\eta(A) = \langle A \rangle$$

η décrit donc la préparation, le protocole.

L'égalité $\eta(A+B) = \eta(A) + \eta(B)$ est
mise en défaut dans l'expérience de Bell du spin $\frac{1}{2}$
Ainsi, cette égalité est vraie en quantique.
mais fausse en classique [i.e. qu'il y a une variable cachée]

Si on accède à la moyenne par le ψ qu'on pose $\eta_\psi(A) = \langle \psi | A | \psi \rangle$.

On démontre alors que η est de la forme $\eta(A) = \mathrm{Tr}(\rho A) = \mathrm{Tr}(A\rho)$
avec ρ de trace 1.

On a alors $\mathrm{Prob}(A, \underset{\substack{\text{ou}\\ |a_i\rangle \\ \text{ou} \\ \psi_i}}{a_i}, \underset{\substack{\text{ou}\\ \rho}}{\psi}) = \mathrm{tr}(\rho P_i)$ où P_i est l'op. de projection sur $|a_i\rangle$

On a $\rho = P_\psi = |\psi_x\rangle\langle\psi_x|$

$$\varphi \longmapsto |\psi_x\rangle \langle \psi_x, \varphi \rangle$$

Mais que signifie "état" ?!

ρ ... façons de mesures ... que devient le ρ

$$\psi \xrightarrow[A,\, a_i]{\text{mesure}} \psi_i$$

Un exemple de ρ : probabilité $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ / $c_1, \dots, c_N$ mais vous ne savez pas lequel est préparé.

$\rho_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$

On a $\rho = \sum c_i \rho_i$

Mais ceci n'est pas le cas général ... c'est le cas classique.

Mélange de cas purs.

Si on prend un ρ général, on peut diagonaliser cette matrice positive dans une base orthonormée (e_i) $\begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{pmatrix}$ et ainsi s'écrit $\rho = \sum_i p_i |e_i\rangle\langle e_i|$.

Mais ici, c'est formel : on ne sait rien du dispositif qui l'a créé.

Ex : Considérons $\mathcal{G} \otimes \mathcal{E}$ et $\psi = \sum \alpha_{ij}\, \sigma_i \otimes \rho_j$

$$\rho_\psi = |\psi\rangle \otimes \langle\psi|$$

et $\langle A \otimes B\rangle_\psi$.

Je peux alors faire une statistique sur le premier système

$$\eta_1(A) \longleftrightarrow \rho_1$$

et on a $\mathrm{Prob}(A, a_i; \rho_1) = \mathrm{tr}(\rho_1 P_i) = p_i$

Mais qu'est-ce que j'ai dit du système.

P. ex : ρ ... mesure non lue ... $\sum P_i \rho P_i$ ... P_i = proj. sur $|a_i\rangle = \psi_i$

C'est le postulat de projection pour une densité. A matrice $n \times n$.

ρ ... mesure lue ... $\dfrac{P_i \rho P_i}{p_i}$ (système dans l'état ψ_i)

$|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

$(P_i |\underbrace{|\psi_i\rangle\langle\psi_i|}_{\rho_i})$

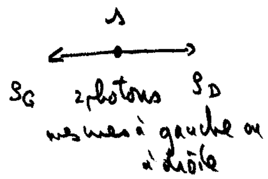
Mélange statistique

et pour la mesure non lue, $\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ on sait que avec probabilité p_i, ρ est ψ_i. ③

Haroche : Pour définir ρ_1, on ne fait pas appel explicitement à la statistique.

... objet individuel ... mais qu'est-ce que ça veut dire ?

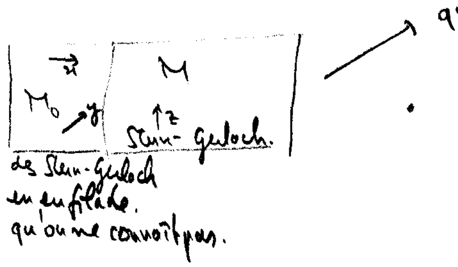
Commentaire de Daniel :



ne faisons une mesure qu'à gauche.
cela fait un ρ non pur à droite.

On a ψ... $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ car pur : $\rho_\psi^2 = \rho_\psi$.

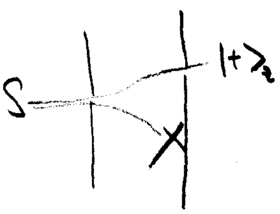
On ne voit pas sur la matrice densité si c'est un mélange ou non.



Il faut définir à la fois la préparation et ce qui va être mesuré.
Sinon, cela n'a pas de sens.

Le postulat de projection doit préciser la mesure envisagée.

Stern-Gerlach : 

Voici la préparation : 

.... proba conditionnelle ... mesure ... fini.

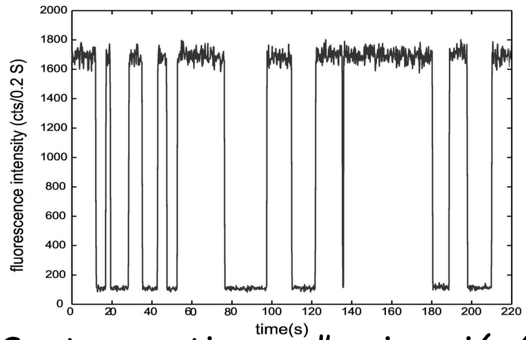
Comment cela est-il dit formellement ?

Mesures répétées et sauts quantiques

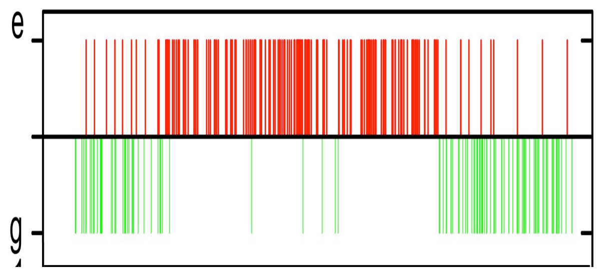
La mesure d'une observable à spectre discret donne comme résultat une valeur discrète. Si on répète la mesure, on trouve le même résultat, en absence d'évolution liée à une perturbation extérieure.

Si le système est couplé à un réservoir qui le fait relaxer, son évolution sous observation continue se manifeste par des sauts discrets, à des instants aléatoires entre valeurs propres différentes. Ce sont les sauts quantiques. Ils ont été observés sur des atomes et des ions piégés et récemment sur un champ électromagnétique (voir suite du cours).

La dynamique du système n'est pas affectée par le couplage à l'appareil de mesure, si le temps de corrélation du couplage au réservoir est très court.



Sauts quantiques d'un ion piégé



Sauts quantiques de la lumière

Si le système évolue de façon réversible et unitaire en absence de mesure, le couplage à l'appareil de mesure projette le système sur son état initial et fige l'évolution: c'est l'effet Zenon quantique (voir cours 2005-2006 et page suivante)

Effet Zenon quantique

Système (A) à 2 états évoluant, à partir de |0>, sous l'effet d'un couplage résonnant entre les 2 états (oscillation de Rabi):

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = \cos\frac{gt}{2}\left|0\right\rangle + \sin\frac{gt}{2}\left|1\right\rangle \qquad (1-7)$$

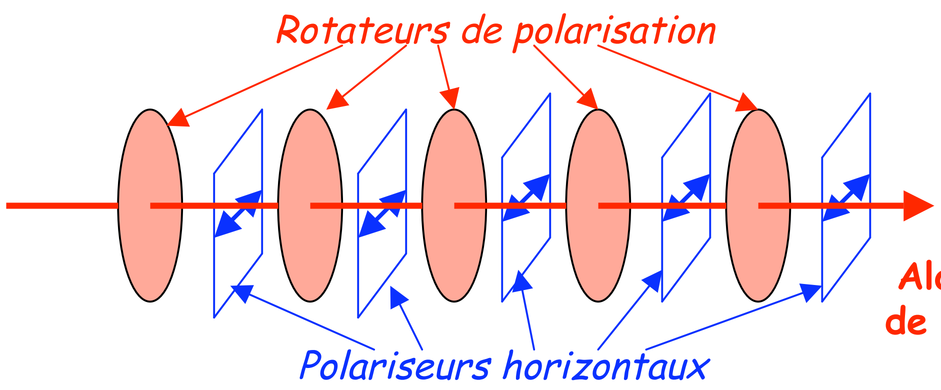
On mesure (A) de façon répétitive avec la périodicité τ dans la base (0,1). La mesure projette (A) avec la probabilité $p = \cos^2\frac{g\tau}{2}$ dans l'état |0>. Après un temps t (t/τ mesures), la probabilité de trouver le système dans |0> est:

$$p_0(t) = \left(p\right)^{\frac{t}{\tau}} = \left[\cos^2\frac{g\tau}{2}\right]^{\frac{t}{\tau}} \approx 1 - \frac{g^2\tau}{4}t + O(\tau^2) \qquad (1-8)$$

Si $\tau \to 0$, $p_0(t) \to 1$: la projection répétée fige l'évolution du système.

Simulation de l'évolution unitaire par rotation de polarisation d'un photon:

$$\left|H\right\rangle \to \cos\theta\left|H\right\rangle + \sin\theta\left|V\right\rangle \qquad (1-9)$$



Les polariseurs re-projettent l'état sur |H >. La probabilité de trouver le système dans |H> après N polariseurs est: $p_H(N) = \cos^{2N}(\theta) \approx 1 - N\theta^2 + O(\theta^3)$

Pour $\theta=\pi/2N$, on obtient: $$p_H(N) = 1 - \frac{\pi^2}{4N} + O(\frac{1}{N^2}) \qquad (1-10)$$

Alors qu'en absence de mesure la polarisation passe de H à V, en présence de mesures elle reste H avec une probabilité qui tend vers 1 quand N → ∞

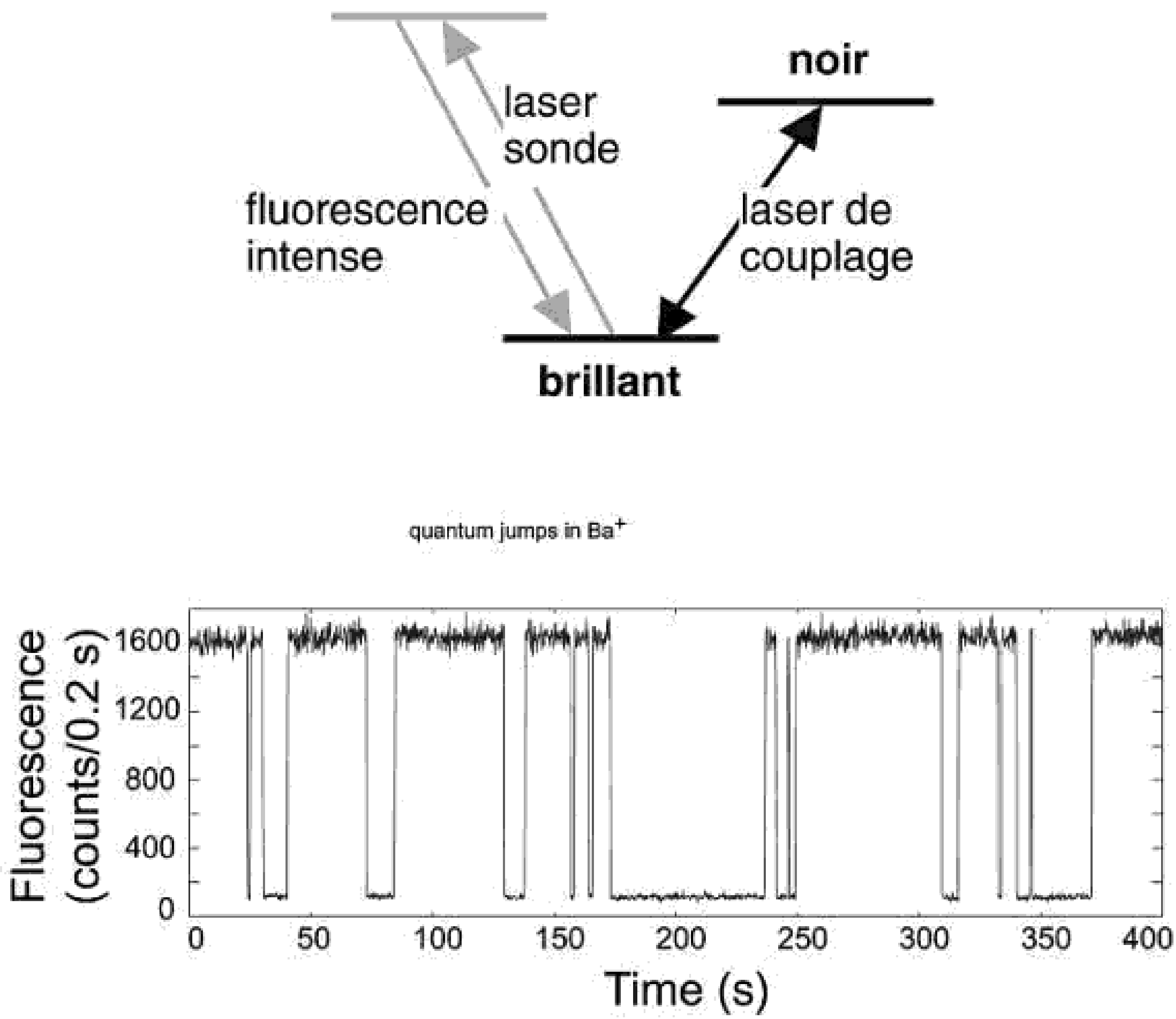


Figure 5.15. Sauts quantiques d'un ion unique piégé. Sous l'effet du laser de couplage, l'ion est dans une superposition linéaire de deux états, brillant et noir. Si on l'éclaire par un laser sonde auxiliaire, l'ion dans l'état brillant diffuse de nombreux photons facilement détectables, alors que dans l'état noir aucun photon du laser annexe n'est diffusé. La figure du bas (enregistrement de la fluorescence en fonction du temps dans une situation de ce type, document C. Raab, J. Eschner, et R. Blatt, Université d'Innsbruck) montre les basculements brutaux d'un état à l'autre à des instants aléatoires, appelés « sauts quantiques ». Si on avait un grand nombre d'ions dans cette situation, on verrait un taux de diffusion de photons quasiment constant, proportionnel à la probabilité de trouver les ions dans l'état brillant. Ce n'est que lorsqu'on a su piéger un ion unique avec des systèmes analogues à celui de la figure 5.14 que l'on a pu observer les sauts quantiques, dont l'existence était jusque-là très controversée.