$\mathcal{H}$, A, $\psi = \sum c_i |a_i\rangle$ $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ $\|\psi\|^2 = \sum |c_i|^2 = 1$

Moyenne de A/ψ : $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$; $\langle\,|\,\rangle$ produit herm.

Proba de trouver a_i : $\mathrm{Prob}(A, a_i; \psi) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle = |c_i|^2$

P_i = projecteur sur $|a_i\rangle$: $P_i = |a_i\rangle\langle a_i|$

Etat statistique quantique : $\eta : A \longrightarrow \langle A\rangle$, moyenne

Propriété $\eta(A+B) = \eta(A) + \eta(B)$

Théorème : $\eta(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$ ρ unique, op. stat.

ρ hermitien, $\mathrm{Tr}\rho = 1$, ρ positif ($\langle u|\rho|u\rangle \geq 0$)

Etat stat. pur : $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi$.

$$\langle A_\psi\rangle = \mathrm{Tr}(P_\psi A) = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

Mélange stat : $\rho = \sum_{j=1}^{N} p_j \rho_j$ avec $\rho_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

Interaction entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$: $\psi = \sum_{i,j} c_{ij} |a_i^{(1)}\rangle \otimes |a_j^{(2)}\rangle$

Etat stat partiel ρ_i relatif à $\mathcal{S}_i$, associé à P_ψ :

Def : $\langle A_1\rangle_{\rho_1} = \mathrm{Tr}(\rho(A_1 \otimes I)) = \mathrm{Tr}\,\rho_1 A_1$

Matrice de ρ_1 : $\rho_1^{k,\ell} = \sum_m c_{km}\bar{c}_{\ell m}$

Cas $\psi = c_1 s_1 \otimes a_1 + c_2 s_2 \otimes a_2$ $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

- Si $\{s_1, s_2\}$ et $\{a_1, a_2\}$ orthon. : $\rho_1 = |c_1|^2 |s_1\rangle\langle s_1| + |c_2|^2 |s_2\rangle\langle s_2|$
- Si $\{s_1, s_2\}$ orthon., mais $\langle a_1|a_2\rangle \neq 0$, $|a_1|^2 = |a_2|^2 = 1$:

$$\text{Matrice de } \rho_1 : \begin{pmatrix} |c_1|^2, & c_1\bar{c}_2\langle a_2|a_1\rangle \\ \bar{c}_1 c_2 \langle a_1|a_2\rangle, & |c_2|^2 \end{pmatrix}$$

- L'état d'un système étant ρ, une mesure A projective transforme ρ en $\frac{1}{c_i} P_i \rho P_i$, si le résultat est lu, où $c_i = \mathrm{Tr}(\rho P_i)$, P_i proj. sur $|a_i\rangle$. Si le résultat n'est pas lu, ρ est transformé en $\sum c_i \left(\frac{1}{c_i} P_i \rho P_i\right) = \sum_i P_i \rho P_i$

<u>Rem</u> : C'est la transcription de l'application du postulat de projection

L'essentiel à retenir / opérateur densité

I Deux types "d'état".

- $\mathcal{H}$, Hilbert, $\psi \in \mathcal{H}$ (normé), A op. hermitien
  $\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |a_i\rangle$. $|a_i\rangle$ v. pr. orthon., val. pr. a_i.
  Moyenne de $A / \psi = \langle \psi | A | \psi \rangle$ (= produit hermitien de ψ et $A.\psi$.)
  (1) $\mathrm{Prob}(A, a_i ; \psi) = |\alpha_i|^2 = \langle \psi | P_{\psi_i} | \psi \rangle$ où
  P_{ψ_i} = projecteur sur ψ_i. En notation de Dirac
  $P_{\psi_i} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$: $P_{\psi_i} \cdot \varphi = |\psi_i\rangle$ multiplié par $\langle \psi_i | \varphi \rangle$ = projection de φ sur ψ_i.
- Etat statistique. (en toute généralité)
  Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$--- sont les grandeurs qu'on mesure
  état stat. = fonction η : $\mathcal{A} \longrightarrow$ moyenne de $\mathcal{A}$. (moyenne des mesures). Notation : $\eta(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A} \rangle$
  La fonction η, état stat, est définie par l'ensemble de ses valeurs : $\langle \mathcal{A} \rangle$.
  En mécanique quantique, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.. sont représentées par A, B, C,--- opérateurs hermit.
  on postule : $\eta(A+B) = \eta(A) + \eta(B)$.
  Théorème de von Neumann : Il existe un opérateur hermitien noté ρ, appelé op. densité tel que $\eta(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$, ρ unique.
  ρ définit ainsi l'état η.
  Propriétés principales :
  $\mathrm{Tr}\rho = 1$, les éléments sur la diagonale principale de la matrice de ρ / rel. base, sont positifs. L'opérateur ρ est hermitien
- Interprétations :
  × Dans l'interprétation courante (à l'ENS. par exemple (C-Tannoudji, Haroche,---)

ψ est ontologique, attaché à l'objet individuel (interprét. ontol. ou littérale, ou individuelle.
ψ porte néanmoins un caractère probabil.-stat.

x. Dans l'interprétation statistique (Einstein...)
ψ est un cas particulier de ρ (voir plus loin)

<u>Remarque</u> générale sur les interprétations (multiples de la M.Q. : il n'y a pas d'interprétation qui, à un moment ou un autre n'en sorte pour emprunter à une autre.

Une différence entre les deux interprétations précédentes = Dans la première, le postulat de projection est fondamental et est appliqué à tout bout de champ dans les raisonnements et la "réduction du paquet d'ondes" est un processus physique réel. Dans la deuxième, un objet individuel n'a pas de fonction d'onde. Il n'y a pas de réduction de cette fonction d'onde (qui n'existe pas)

II L'opérateur densité est utilisé aussi bien dans l'une ou l'autre des 2 interprétations.

(1) • À ψ, correspond l'opérateur densité ρ_ψ :

(a) $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ projecteur. Cas dit pur.

$\eta_\psi(A) = \langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle = \mathrm{Tr}(\rho_\psi A)$

• Dans l'interprét. ontol, chaque objet (quantique) porte son label "ψ", épinglé sur lui. Ce label peut être, à l'origine, un acte de naissance (préparation) ou le résultat de l'application du postulat de projection.

Dans l'interprétation stat. l'état caractérisé par ρ est le résultat d'une préparation.

c'est une machine à calculer des moyennes et des probabilités.

Formule générale pour les probabilités =

(1) $\text{Prob}(A, a_i; \rho) = \text{Tr}(\rho P_i)$ (cf. p. 1.)

(A retenir, se vérifie facilement sachant ce qui suit)

Ces calculs peuvent se faire en choisissant n'importe quelle base (orthon.) de $\mathcal{H}$

En particulier ρ étant hermitien, prend la forme diagonale $\begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$ dans une certaine base orthonormée, disons u_i.

[on a $\sum p_i = 1$ et $p_i \geq 0$ et on peut écrire

$\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i P_i$ où $P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$ $(n = \dim \mathcal{H})$

(2). Cas de ρ purs ou non purs.

- Exemple d'état ρ qui n'est pas (à priori) du type $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ (état dit pur).

On envisage 1 préparation qui produit des $\psi_1 \cdots \psi_N$ avec une proba $c_1 \cdots c_N$. (Les c_i expriment l'ignorance sur quel état a été préparé ($c_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{N} c_i = 1$)

<u>A retenir</u> = l'état ρ produit est

(b) $\rho = \sum_{i=1}^{N} c_i \rho_{\psi_i}$; $\rho_{\psi_i} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

(facile). <u>Attention</u> = N est quelconque, les ψ_i ne sont pas nec. ~~[illegible]~~ orthogonaux.

Un tel ρ est dit <u>non pur</u>.

<u>Théorème</u> = Un cas pur ne peut pas se décomposer en somme de ρ_i, purs ou non

<u>Mise en garde</u> importante =

La décomposition (b) n'est <u>jamais</u> unique

Remarque : Pour le calcul des probabilités, n'importe quelle décomposition est aussi bonne qu'une autre.

(3) Remarque plus qu'importante.

- Point de vue ontologique : Dans la préparation du (2), chaque individu est dans un état précis, soit ψ_1, soit ψ_2, ... soit ψ_N. On parle de mélange statistique
- Point de vue statistique :
  chaque individu ~~dans un ens~~ fait partie de ensemble statistique caractérisé par ρ. La décomposition (b) étant une décomposition particulière qui n'a rien de particulier
- ~~Un~~ ρ quelconque, général, peut s'écrire sous une forme de type (b), comme à la fin du (1) :

$$\rho = \sum p_i \rho_i = \sum p_i \, |u_i\rangle\langle u_i|$$

En statistique, cette décomposition peut avoir un intérêt pour calculer des moyennes ou des probabilités. En ontologique, qui utilise aussi des concepts de statistiques (les mêmes !), il en va de même. Par contre, en ontologique on n'a pas le droit d'affirmer que le système individuel est soit dans l'état u_1, u_2 ou u_N.

! Sauf pour faire des calculs de probabilités !

(4). Etat statistique de deux systèmes en interaction

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{H}_1\ \mathcal{H}_2 \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 . \quad A_1 B_1 \dots , A_2 , B_2 \dots$

Etat général = $\psi = \sum_{(ij)} \alpha_{ij} \, |a_i^{(1)}\rangle \otimes |a_j^{(2)}\rangle$ avec

$|a_i^{(1)}\rangle$ base de v. pr. de A_1, val. pr. $a_i^{(1)}$

$|a_i^{(2)}\rangle$ " " " de A_2, " " $a_i^{(2)}$

Operateur statistique globale : $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$
Sauf cas exceptionnel, les systèmes (1) ~~et~~ (2) ne sont plus dans un états "psy" (sauf si $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$)
En ontologique on parle d'états généralisés qui ne sont autres que des états statistiques!

A savoir:
On est toujours en présence de deux objets individuels (qui interagissent). L'operateur (le physicien) peut faire des mesures sur l'un (ou l'autre) des objets.

On convient que mesurer la grandeur A_1 sur le système 1, revient à mesurer $A_1 \otimes \underline{I}$ sur le système globale ($\underline{I}$ étant l'operateur identité)
Las moyennes $\langle A_1 \rangle$ est experimentalement définie et s'obtient par le calcul, en écrivant $\langle A_1 \rangle = \langle A_1 \otimes \underline{I} \rangle_\psi = \mathrm{Tr}\,\rho(A_1 \otimes \underline{I})$
Les nombres $\langle A_1 \rangle$ etc définissent un état statistique à qui il correspondra un operateur ρ_1 :

$$\langle A_1 \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_1 A_1)$$

L'egalité $\mathrm{Tr}(\rho_1 A_1) = \mathrm{Tr}\,\rho(A_1 \otimes \underline{I})$ permet de calculer ρ_1.
La matrice de ρ_1, dans les bases definies au début du (4), est donnée par :

$$\rho_{k,\ell} = \sum_m c_{k,m} \bar{c}_{\ell,m} \quad \text{(pour mémoire)}$$

On dit que ρ_1 est obtenue par trace partielle sur le système (2) (indice m) et on note

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\,\rho \quad \text{de même } \rho_2 = \mathrm{Tr}_1\,\rho.$$

Il y a un lien entre ρ_1 et ρ_2 (parent commun ρ). Le théorème de Schmidt en découle (voir ultérieurement)

(5). L'interprétation des états ρ_1, ρ_2 est délicate et semée d'embûches

- Ce sont des états statistiques. Pour un ~~système~~ objet individuel (du système $\mathcal{S}_1$ p.ex) on peut à la rigueur dire qu'il participe comme individu d'un ensemble statistique (d'objets de $\mathcal{S}_1$ qui interagissent avec des syst. de $\mathcal{S}_2$), dont l'opérateur statistique est ρ_1. En tout cas, ρ_1 ne peut pas être un cas pur $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ (ψ_1 dans $\mathcal{H}_1$), sauf si : théorème : si ρ_1 est pur, alors $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ (interaction triviale)

- ρ_1 (ou ρ_2) comme n'importe quel op. stat. ~~peut~~ s'écrire $\rho_1 = \sum p_i \rho_i$ avec $\rho_i = |\psi_i^{(1)}\rangle\langle\psi_i^{(1)}|$
Mais rien ne permet de dire que l'objet ~~système~~ individuel de $\mathcal{S}_1$ est soit dans l'état ψ_1, ou ψ_2, ou --- ; ce serait même en contradiction de ce qu'on vient de dire : chaque sous-système n'a plus d'état ψ.

(6) Exemples de traces partielles

$$\psi = \sum_i c_i |s_i\rangle \otimes |a_i\rangle$$

Cas particulier : $(|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1)$

$$\psi = c_1 |s_1\rangle \otimes |a_1\rangle + c_2 |s_2\rangle \otimes |a_2\rangle$$

on suppose $\left\{ \begin{matrix} |s_1\rangle, |s_2\rangle \\ |a_1\rangle, |a_2\rangle \end{matrix} \right\}$ orthonormés $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

alors $\rho_1 = |c_1|^2 |s_1\rangle\langle s_1| + |c_2|^2 |s_2\rangle\langle s_2|$

$\rho_2 = |c_1|^2 |a_1\rangle\langle a_1| + |c_2|^2 |a_2\rangle\langle a_2|$

Si $|a_1|^2 = |a_2|^2 = 1$, mais $\langle a_i | j \rangle \neq 0.$, alors la matrice de ρ_1 est

$$\begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 \bar{c}_2 \langle a_2, a_1 \rangle \\ \bar{c}_1 c_2 \langle a_1, a_2 \rangle, & |c_2|^2 \end{pmatrix}$$

c. à. d. $\rho_1 \neq |c_1|^2 |s_1\rangle\langle s_1 + |c_2|^2 |s_2\rangle\langle s_2|$

Exemples :

- Le théorème de schmidt dit en gros, que un ψ de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ étant donné, il peut être mis sous la forme $\sum_i c_i |s_i\rangle \otimes |a_i\rangle$
- Dans le modèle de la mesure quantique de von Neuman l'état de l'objet quantique intriqué avec l'appareil de mesure est de la forme
  $$c_1 s_1 \otimes a_1 + c_2 s_2 \otimes a_2$$
- Dans le cadre E.P.R., le vecteur de Bohm:
  $$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle \right]$$
  est de ce type.
- Dans le fonctionnement de l'appareil de stern et Gerlach on retrouvera ce même type, ainsi que dans l'interféromètre à neutrons.

7 a) Dans le cadre de l'interprétation ontologique on se pose la question de l'effet d'une mesure (sur $\mathcal{S}_1$) quant à son état. C'est à dire : l'objet étant dans l'état ρ_1, quel est son état après une mesure projective.

Autrement dit, on applique le postulat de projection de von Neumann. Soient $|a_i\rangle$ les vect propres de A. La probabilité de trouver a_i comme valeur est donnée par $q_i = Tr(\rho_1 P_i)$ où P_i est le projecteur sur le sous-espace (non dégénéré), $|a_i\rangle$, et l'état de S_1 après la mesure est $|a_i\rangle$

Si on ne regarde pas le résultat de la mesure, l'état est soit $|a_1\rangle$ avec une proba égale à q_1, soit $|a_2\rangle$ avec q_2 ...
L'état de S_1 est donc

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \, |a_i\rangle\langle a_i| .$$

Pour des raisons d'écriture, à voir, ces résultats sont écrits en fonctions de l'état ρ_1 de départ, noté ρ

- mesure lue :
  ρ est transformé en $\dfrac{P_i \rho P_i}{q_i}$ $\left(\frac{1}{q_i} P_i \rho P_i\right)$
- mesure non lue
  ρ est transformé en $\sum_i q_i \left(\dfrac{P_i \rho P_i}{q_i}\right) = \sum P_i \rho P_i$

c'est une transformation formelle d'écriture; inutile de la vérifier (facile)

b) Dans le cadre de l'interprétation statistique, ce qui précède n'a aucun sens.

En statistique cela n'a pas de sens d'utiliser le postulat de projection. Mais on peut le contourner. Dans la plupart des cas, l'objet est détruit après mesure : ρ donne les moyennes et cela s'arrête là.
Dans le cas de la mesure dite projective il y a survie = c.à.d. mesure ≡ préparation. En statistique, si il y a survie, un ρ initial donne un ρ' sortant. Il n'y a pas de formule générale (contrairement au paragraphe a) p.7) ; cela dépend des conditions expérimentales. Pour illustrer, on peut reprendre le cas du Stern et Gerlach en supposant qu'il y a n trajectoires (et n trous correspondants dans l'écran (n étant le nombre de val. propres d'une grandeur A)

- On généralise la formule (1) de la page 3 :
On désigne par Δ un ensemble de val. pr. de A et par $\mathcal{E}_\Delta$ le sous-espace engendré par tous les vecteurs propres de val. pr. contenues dans Δ, et par Π_Δ le projecteur sur $\mathcal{E}_\Delta$:

$$(3)' : \mathrm{Prob}(\text{"}A \in \Delta\text{"}; \rho) = \mathrm{Tr}(\rho\, \Pi_\Delta)$$

- le dispositif de mesure-préparation de St. et G. est de type filtrant, c.à.d, macroscopiquement, on peut filtrer telle ou telle voie.

- il faut remarquer que si Δ = val.pr (A), alors

$$\rho = \Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta$$

et réciproquement.
[car si $\rho = \Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta$, alors $\mathrm{Prob}(A \in \Delta; \rho) =$
$\mathrm{Tr}([\Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta] \circ \Pi_\Delta) = \mathrm{Tr}(\Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta) = \mathrm{Tr}\,\rho = 1$ ce qui implique Δ = v. pr. A. Réciproquement : $\Pi_\Delta = id$]

Dans le dispositif St et G imaginé, gardons les trous relativement à Δ ouverts. L'état ρ' après le passage du dispositif de St et G. est :

$$\rho' = \frac{\Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta}{q_\Delta} \quad \text{où } q_\Delta = Tr(\Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta)$$

[Car Proba $(A \notin \Delta ; \frac{1}{q_\Delta} \Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta) = \frac{1}{q} Tr((\Pi_\Delta \rho \Pi_\Delta) \Pi_{\Delta^0})$ où Π_{Δ^0} est le projecteur sur le s-espace supplémentaire. Or $\Pi_{\Delta} \Pi_{\Delta^0} = 0$ et cette probabilité est nulle. Donc la remarque précédente s'applique. (on divise par q_Δ pour normer l'état $= Tr = 1$)

En comparant avec la formule page 8, 8e ligne du bas, on voit qu'elle en est l'analogue (généralisé).

La formule en dessous (p. 8) est difficile à réaliser pratiquement :

- soit on laisse tous les trous ouverts et alors $\rho' = \rho$ $(\Pi_\Delta = id)$
- ou bien on ferme alternativement (?) tous les trous sauf 1 pour obtenir une préparation qui corresponde à cette formule

Ce qui précède montre comment on se passe du postulat de projection. Pour des résultats de mesure à la sortie du filtrage on raisonne par probabilités conditionnelles. Par ex. :

$$Prob(A' \in \Delta' ; A \in \Delta \text{ et } \rho) = Prob(A' \in \Delta' ; \rho') = Tr(\rho' \Pi_{\Delta'})$$

Dans la conception ontologique on mélange des concepts de nature différente (état ψ, état statistique "ρ", état (trace) partiel (qui est aussi explicitement de nature statistique), ceci pour traquer <u>formellement</u> l'objet indiv. dans son périple.