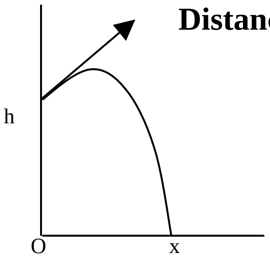


Distance maximale et angle optimal pour un jet de la hauteur h

(Serge CABALA 14-3-2013)

$\vec{v}$ est la vitesse initiale de module v. v et h sont donnés.

α est l'angle que fait le vecteur $\vec{v}$ avec l'axe ox.

On cherche la valeur de α pour laquelle x est maximal à l'impact sur ox.

Notons τ le temps. Les équations du mouvement s'écrivent : $\begin{cases} (1) \quad x = v\tau\cos\alpha \\ (2) \quad y = -\frac{1}{2}g\tau^2 + v\tau\sin\alpha + h \end{cases}$

(1) donne $\tau = \dfrac{x}{v\cos\alpha}$, que l'on remplace dans (2) pour obtenir l'équation de la trajectoire .

$y = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v^2\cos^2\alpha} + v\dfrac{x}{v\cos\alpha}\sin\alpha + h$ soit $y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v^2}(1+\tan^2\alpha)\,x^2 + x\tan\alpha + h$

Posons $t = \tan\alpha$, l'équation de la trajectoire s'écrit : $y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v^2}(1+t^2)\,x^2 + t\,x + h$

La valeur de x à l'impact sur ox vérifie : $0 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v^2}(1+t^2)\,x^2 + t\,x + h$ (3) .

La valeur maximale de x vérifiant (3) est telle que $\dfrac{dx}{d\alpha} = 0$. Or $\dfrac{dx}{d\alpha} = \dfrac{dx}{dt}\dfrac{dt}{d\alpha} = \dfrac{dx}{dt}(1+t^2)$ donc $\dfrac{dx}{dt} = 0$

Posons $f(t,x)$ le deuxième membre de (3) . $f(t,x) = 0$ donc $\dfrac{df}{dt} = 0$ or $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\delta f}{\delta t} + \dfrac{\delta f}{\delta x}\dfrac{dx}{dt}$

Et puisque $\dfrac{dx}{dt} = 0$ lorsque x est maximal, on doit avoir $\dfrac{\delta f}{\delta t} = 0$ pour cette valeur de x.

Or : $\dfrac{\delta f}{\delta t} = -\dfrac{g}{v^2}t\,x^2 + x$ donc $-\dfrac{g}{v^2}t\,x + 1 = 0$ (4) (x=0 ne convient pas à (3) pour h non nul.)

De (4) on tire $x = \dfrac{v^2}{g\,t}$ que l'on remplace dans (3) ce qui donne immédiatement $t^2 = \dfrac{v^2}{v^2 + 2\,g\,h}$

De (4) on tire $t = \dfrac{v^2}{g\,x}$ que l'on remplace dans (3) ce qui donne immédiatement $x^2 = \dfrac{v^2}{g^2}(v^2 + 2gh)$

En définitive. L'angle optimal α est donné par: $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}}$

La distance maximale est : $\boxed{x = \dfrac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gh}}$

Vérification. On prend h=2 ; g=9,81 ; et v=10 (36 km/h).

On trace en rouge le segment vertical correspond à x maxi donné ci-dessus. (Voir figure au dos.)

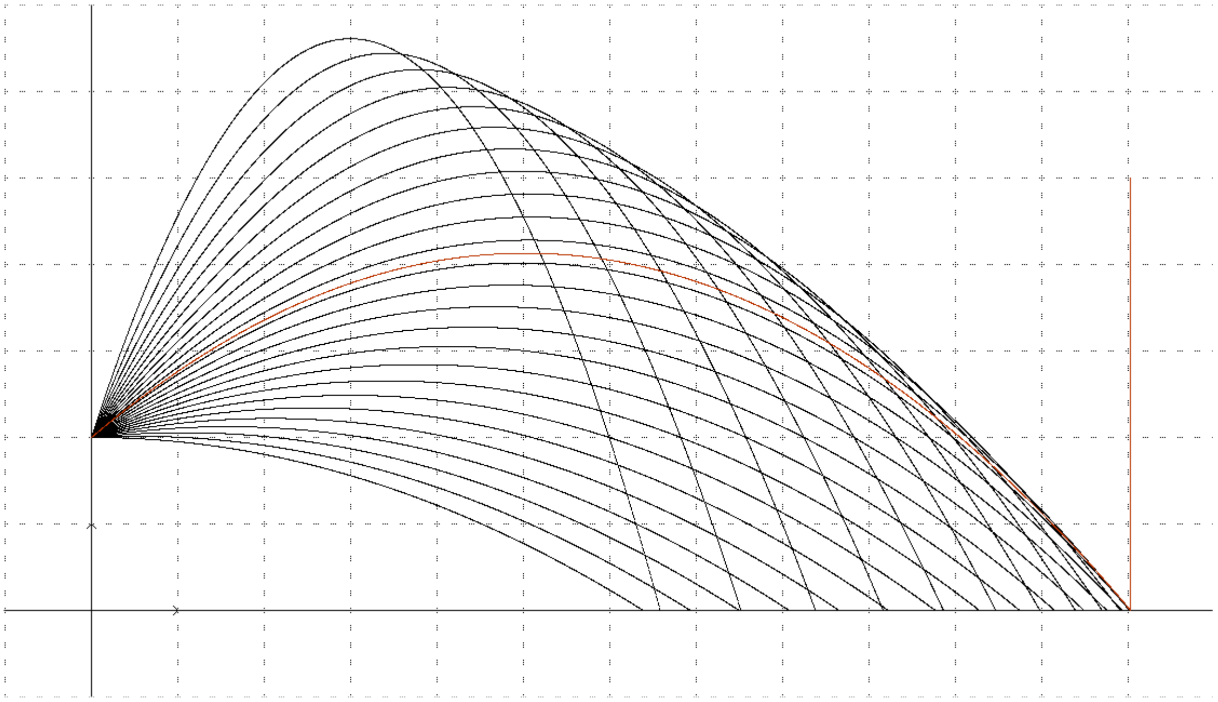
On trace en rouge la trajectoire optimale d'angle α avec $\tan\alpha$ donné ci-dessus. ($\alpha = 40°,279..$)

On constate que cette trajectoire en rouge atteint la distance maximale.

On construit différentes autres trajectoires avec α entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ (dans la figure, α varie de 0 à $\dfrac{2\pi}{5}$)

On remarque que ces autres trajectoires ne dépassent ni n'atteignent ce maximum.

Figure pour la vérification.



Complément :

La hauteur maximale de la trajectoire optimale (rouge) se produit pour : $\boxed{x = \dfrac{v^3\sqrt{v^2+2gh}}{2g(v^2+gh)}}$

Et a pour valeur : $\boxed{y = h + \dfrac{v^4}{4g(v^2+gh)}}$

Dans le cas de la figure, pour les valeurs h,g,v données, on trouve que le sommet de la trajectoire optimale a pour coordonnées x=5.0278.. et y=4.1204..