Paul Lillo
14/3/2013

L'effet Magnus (Bernoulli - Robins - Magnus)

Jacobi - Legendre (sur Fourier) : "L'honneur de l'esprit humain"
≠ utilité publique / explication des phénomènes naturels

Robinson-Keller. The transverse force of...

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}_G = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{poids}} + \underbrace{\pi\rho R^2 \vec{\Omega}\wedge\vec{v_a}}_{\text{Magnus}} - \underbrace{6\pi R\mu\vec{v_a}}_{\text{Stokes}} - \frac{9}{4}\pi\rho R^2 \|\vec{v_a}\|\,\vec{v_a}$$

Magnus (lift force) portance — Stokes (drag force) traînée — OSEEN (drag force). terme quadratique

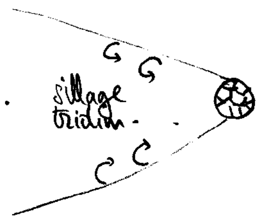
$$I_G \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = -8\pi\mu R^3\vec{\Omega}$$. μ grand (μ = viscosité).

Mais si $\mu \ll 1$, $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 = \omega_0\vec{k}$.

Fuchs, Smith : Robinson-Keller pas adapté au base-ball.

pitch / warple / winding / cut = ballons coupés avec des effets divers.

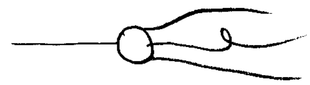
knuckle-ball



Reynolds.

$$\underset{\text{dragforce}}{\vec{f}} = -6\pi R\mu\vec{v_a}\left(1+\frac{3Re}{8}\right)$$

$$Re = \frac{v_a D}{D} \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$
↑ variable !

laminaire  

On va faire 4 hypothèses : ◦ enlever OSEEN : linéarisation
- On suppose que la formule vaut pour tout $\mu \geq 0$
- ballon indéformable (pas d'aéroélasticité)

[peut-on se ramener à un principe variationnel ? "$\delta = 0$"]

- sillage est modélisé par Stokes uniquement
- $\mu = 0$

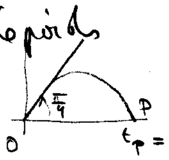
On trouve donc : $\begin{cases} \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 = \omega_0 \vec{k} \\ m\vec{\Gamma}_a = m\vec{g} + \pi\rho R^2 \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{v}_a \end{cases}$

$$= -mg\vec{k} + \pi\rho R^2 (p_0\vec{i} + q_0\vec{j} + r\vec{k}) \wedge (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})$$

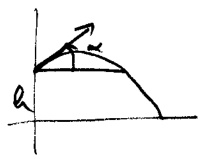
On aurait voulu $m\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{pmatrix} = -mg\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & & -p_0\\ p_0 & 0 & q_0\\ r_0 & 0 & 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

6° hypothèse : $\vec{\Omega}_0 = \omega_0\vec{k}$.

Lancer de poids



$t_p = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$.



$\sin^2\alpha = \frac{v_0^2 + hg}{hg}$

→ on résout $\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t \\ y = 0 \quad \text{"mvt plan"} \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + h. \end{cases}$

Reste 1) $\vec{\Omega}_0 = \omega_0\vec{k}$ vertical (n'existe pas en vérité !)

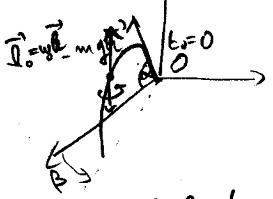
Quel est le torseur de force de l'air sur S : $\mathcal{T}(Air \to S) = \begin{Bmatrix} -6\pi R\mu\vec{v}_a + \pi\rho R^2_{as}\vec{k}\wedge\vec{v}_a \\ -8\pi\mu R^3 \vec{\Omega} \end{Bmatrix}_G$

$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{-\pi\rho R^3 \omega_0 \dot{y}}{m} \\ \ddot{y} = \frac{\pi\rho R^3 \omega_0}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$ $\begin{cases} u = \dot{x} \\ v = \dot{y} \\ w = \dot{z} \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{u} = \frac{-\pi\rho R^3 \omega_0 v}{m} \\ \dot{v} = \frac{\pi\rho R^3 \omega_0 u}{m} \\ \dot{w} = -g \end{cases}$

On pose $\zeta = u + iv$, $i^2 = -1$.

$\omega_0 > 0$

On trouve G $\begin{cases} u = \underline{V_0 \cos\alpha} \\ y = \\ z = \end{cases}$



Application numérique :

La force de Magnus est gyroscopique : elle ne travaille pas !

$v_0 = 72$ km/h $= 20$ m/s
$\omega_0 = 20$ rad/s

A Mexico City, $\rho = 1$ kg/m³
A Paris, $\rho = 1{,}29$ kg/m³.

Solution : $(G)_{(t)} \begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0\cos\alpha}{\left(\frac{\pi\rho R^3\omega_0}{m}\right)} \sin \frac{\pi\rho R^3\omega_0}{m} t \\ y(t) = \dfrac{v_0\cos\alpha}{\frac{\pi\rho R^3\omega_0}{m}}\left(1 - \cos\frac{\pi\rho R^3\omega_0}{m} t\right) \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t \end{cases}$

Cela donne un cercle de rayon $a = \dfrac{V_0\cos\alpha}{\left(\frac{\pi\rho R^3\omega_0}{m}\right)}$: $\mathcal{C}(I, a)$ (O_{xy}).
O_y

$\tan\beta = \frac{y_P}{x_P} = \pi \ldots$ où $t_P = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

La formule des Lillo's brothers : $\beta = \frac{\pi \rho R^3 \omega_0 v_0 \sin\alpha}{mg}$.

Application numérique : $R = 0{,}11\,m$

$\omega_0 = 20\,rad/s$

$V_0 = 20\,m/s$

$g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

$\rho = 1\,kg/m^3$ à Mexico City.

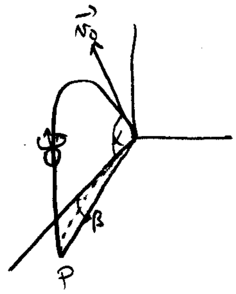
Ainsi $\beta \in [12°, 23°]$.

Nous avions établi $m\vec{\Gamma}_G = -mg\vec{k} + \pi\rho R^2 \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{V}_G$

et résolue :

$$G \begin{cases} x(t) = \frac{v_0\cos\alpha}{\lambda}\sin(\lambda t) \\ y(t) = \frac{v_0\cos\alpha}{\lambda}(1-\cos\lambda t) \\ z(t) = -\frac{1}{2}g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\pi\rho R^3 \omega_0}{m}$$



Alors $\tan\beta = \frac{y_P}{x_P}$ avec $\beta = \lambda \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

et $\beta = F\left(\frac{\rho}{g}\right)$: $g \sim \lambda$; si z est l'altitude, $\rho(z) \simeq 1{,}225(1 - 22{,}6\,10^{-6} z)^{4{,}255}$ $kg\,m^{-3}$

Problème : ici on a supposé $\vec{\Omega}_0$ vertical,

En foot ce n'est jamais le cas ! $\vec{\Omega}_0 = p_0\vec{i} + q_0\vec{j} + r_0\vec{k}$

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} + \frac{\pi\rho R^2}{m}\begin{pmatrix}p_0\\q_0\\r_0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

$$\dot{v} = \mathcal{G} + \varkappa\, \mathcal{A} v, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix}0 & -r_0 & q_0\\ r_0 & 0 & -p_0\\ -q_0 & p_0 & 0\end{pmatrix}.$$ Notons $B_0 = \varkappa\,\mathcal{A}_0 v$

On va chercher une solution particulière et

les solutions de l'équation homogène.

Or $\mathcal{A}$ a comme valeurs propres $0, \pm i \left\| \begin{smallmatrix}p_0\\q_0\\r_0\end{smallmatrix} \right\|$, etc.

et on peut appréhender le problème numériquement en fonction de $p_0, q_0, r_0, v_0, \alpha$.

Si $y = x^2$, arc de parabole $\quad L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+4t^2} = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} \sqrt{1+x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(b\sqrt{1+4b^2} - a\sqrt{1+4a^2}\right) + \frac{1}{4}\ln \frac{2b\sqrt{1+4b^2}}{2a+\sqrt{1+4a^2}}$$

On peut aussi "doper" la force de Magnus

Cas particulier. $\vec{\Omega_0}$ horizontal : $\vec{\Omega_0} = \omega_0 \vec{j}$

La trajectoire est plane : $\quad x = \frac{g+\lambda v_0 \cos\alpha}{\lambda} \sin\lambda t + \frac{v_0 \sin\alpha}{\lambda}(1-\cos\lambda t) - \frac{g}{\lambda} t$

$$y = 0$$

$$z = \frac{g+\lambda v_0\cos\alpha}{\lambda^2}(\cos\lambda t - 1) + \frac{v_0 \sin\alpha}{\lambda}\sin\lambda t.$$

OP trace cycloïde allongée ($v_0 > 0$)
ou raccourcie ($v_0 < 0$)

Cas général :

Cas particulier : $\vec{\Omega_0} = \omega_0 \vec{k}$
$\vec{V_a} = U + \dot{z}\vec{k}$ $\quad$ ce qui se découple en

$$\begin{cases} m\frac{d\vec{U}}{dt} = -6\pi R\mu \vec{U} + \pi\rho R^3 e^{-\varepsilon t}\omega_0 \vec{k}\wedge\vec{u} \\ m\ddot{z} = -mg - 6\pi R\mu\dot{z} \end{cases}$$

$$z(t) = -\frac{mg}{6\pi R\mu}t - \frac{m}{6\pi R\mu}\left(v_0\sin\alpha + \frac{mg}{6\pi R\mu}\right)e^{-\frac{6\pi R\mu}{m}t} + \frac{m}{6\pi R\mu}\left(v_0\sin\alpha + \frac{mg}{6\pi R\mu}\right)$$

$$|\vec{U}| = V_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{6\pi R\mu}{m}t}$$

$$\phi = (\vec{\tau}, \vec{U}) : \quad \dot{\phi} = \frac{\pi\rho R^3\omega_0}{m} e^{-\varepsilon t}$$

$$\phi(t_p) = \frac{\rho R^2\omega_0}{12\mu}\left(1 - e^{-\frac{12\pi R\mu}{m}t_p}\right)$$

$$\dot{x} = v_0\cos\alpha\, e^{-\frac{6\pi R\mu}{m}t}\cos\left[\frac{\rho R^2\omega_0}{12\mu}\left(1-e^{-\frac{12\pi\mu R}{m}t}\right)\right] \quad \text{et on intègre}$$

$$\dot{y} = \quad \sin[\quad]$$

et $\tan\beta = \frac{y(t_p)}{x(t_p)}$ ... la courbe projetée est un arc de cercle !

→ en volleyball on observe une inversion de l'effet Magnus.

→ si le ballon est pelucheux :

Q. dans le bilan des forces, l'effet Magnus n'apparaît pas.
Est-elle appliquée au centre de masse ?
L'effet de Magnus devrait avoir un moment, à moins qu'elles
pointent toutes vers le centre de masse !