Boost tangent le long d'une ligne d'univers en relativité restreinte et générale

Initialisation 9

Introduction

En relativité restreinte une particule inertielle est définie par sa ligne d' univers, c' est à dire une droite (géodésique) de l' espace de Minkowski, espace vectoriel de dimension 4 muni de la métrique
η = diag (-1, 1, 1, 1).Une telle droite est de genre temps c' est à dire que son vecteur unitaire (qui est aussi la quadrivitesse de la particule) a son carré scalaire égal à - 1. Le sous espace supplémentaire orthogonal définit l' espace physique de la particule constitué de ses évènements simultanés.

Le rapport entre deux particules inertielles est défini par une matrice de Lorentz spéciale, celle qui traduit la transformation de Lorentz - Poincaré. Cette matrice appelée boost a la particularité de laisser invariant un plan de genre espace dont l'orthogonal supplémentaire est le plan de la dite transformation.

Pour une particule non inertielle dont la ligne d'univers n'est plus une droite on ne parle plus de boost ni de transformation de Lorentz. Dans le but de combler cette lacune nous proposons de revenir sur la définition du groupe de Lie des matrices de Lorentz et de son algèbre de Lie et d'étudier l'action de ce groupe sur
l' espace de Minkowski. Cela nous conduit à définir le boost tangent le long d'une ligne d' univers et
d'étendre ensuite cette notion dans le cadre de la relativité générale où on a une variété munie d'une métrique de signature (-1, 1, 1, 1). On illustre cela avec l' exemple de la planète Mercure où on met en évidence une rotation instantanée de son espace physique.

Groupe de Lie et son algèbre

1°) Un groupe de Lie est une variété différentiable munie de la structure algébrique de groupe avec une opération différentiable.

Exemple : groupe de Lie des matrice orthogonales SO(3). La variété est une sous-variété de $\mathbb{R}^9$

muni des coordonnées
$A = (a_{ij})$, elle est définie par les six équations de la relation matricielle ${}^{T}A.\ A = I$. La structure de groupe est définie par la multplication matricielle.

2°) L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'espace tangent T_e au point e de la variété, e étant l'élément neutre du groupe.
T_e est un espace vectoriel muni d'une opération supplémentaire, le commutateur de Lie de deux Vecteurs.

Exemple : l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ de SO(3) est l'espace vectoriel de dimension 3 des matrices anti-symétriques muni du commutateur

$$[\Omega 1, \Omega 2] = \Omega 1.\ \Omega 2 - \Omega 2.\ \Omega 1$$

Il est facile de voir que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ (euclidien avec le PS standard) muni du produit vectoriel.

Pour appréhender $\mathcal{A} = T_{e=I}$ considérons une courbe différentiable de paramètre t, tracée sur la variété SO(3), $t \to A(t)$ et son vecteur tangent $\frac{dA}{dt} \in T_A$ puis la translation à gauche dans le groupe par $A^{-1} = {}^{T}A$ définie selon $L_{A^{-1}}(B) = A^{-1}.\ B$:
en particulier on a $L_{A^{-1}}(A) = A^{-1}.\ A = I$.
$L_{A^{-1}}$ est une opération différentiable et son application linéaire tangente $DL_{A^{-1}}$ est aussi $L_{A^{-1}}$ et envoie le vecteur tangent $\frac{dA}{dt}$ en T_I :

$$\Omega = DL_{A^{-1}}\left(\frac{dA}{dt}\right) = {}^{T}A.\ \frac{dA}{dt}.$$

Voilà pouquoi l'algèbre de Lie T_I de SO(3) est l'espace vectoriel des matrices antisymétriques car en dérivant par rapport à t la relation ${}^{T}A.\ A = I$ on obtient ${}^{T}\Omega + \Omega = O$.
Remarquons que nous pouvons également approcher T_I au moyen de la translation à droite par A^{-1} selon la définition
$R_{A^{-1}}(B) = B\ .\ A^{-1}$

3°) Application à la cinématique de la rotation d'un solide autour d'un point fixe.

SO(3) agit sur $\mathbb{R}^3$ euclidien en tant que que le groupe de ses isométries = groupe de Lie des rotations et voici l'intérêt d'utiliser SO(3) et $\mathcal{A} = T_I$:
Soit O un point de l'espace affine et deux repères orthonormées directs (O, e) et (O, E) reliés par la matrice orthogonale de passage A. Une courbe de la variété SO(3) définit un mouvement de rotation de (O, E) autour de O par rapport au repère de référence (O, e).

Soient x et X les coordonnées d'un point M voisin de O respectivement dans les repères (O, e) et (O, E) on a la relation en supposant que M se déplace par rapport à (O, E) :

$$x(t) = A(t)\ .\ X(t)$$

La dérivée par rapport à t donne la relation :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}.\ X + A\ .\ \frac{dX}{dt}$$

La translation à gauche $L_{A^{-1}}$ traduit en coordonnées dans (E) la relation vectorielle qui définit la

règle de dérivation par rapport à t : que l'on peut énoncer de la manière suivante :
la dérivée absolue $\left(\frac{dM}{dt}\right)_e$ de M (ou d'un vecteur) par rapport à t est égale à la somme de la dérivée relative $\left(\frac{dM}{dt}\right)_E$ et de la dérivée d'entrainement définie par le terme $\Omega . X$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_e = \left(\frac{dM}{dt}\right)_E + \Omega . X$$

La translation à droite $R_{A^{-1}}$ donne la la traduction dans (e) de cette règle.
Ω est un tenseur antisymétrique covariant à deux indices dont l'adjoint est un vecteur ω de $\mathbb{R}^3$ qui permet d'écrire la vitesse d'entrainement sous la forme vectorielle bien connue : $\Omega . X = \omega \wedge X$

Autre intérêt de $\mathcal{A} = T_I \approx \mathbb{R}^3$: soit B la boule ouverte de rayon π dans $\mathbb{R}^3$, l'application exponentielle de B dans SO(3)

$$\Omega \longmapsto \text{Exp}(\Omega) = \sum \frac{\Omega^k}{k!}$$

est un difféomorphisme de B sur son image.
On obtient un paramétrage local remarquable de SO(3) :

Soit U le vecteur associé à la matrice antisymétrique Ω de norme ω alors on a la formule remarquable :

$$A = \text{Exp}(\Omega) \in SO(3), \quad X \in \mathbb{R}^3, \qquad A . X = X + \text{Sin}(\omega)\, U \wedge X + (\cos(\omega) - 1)\, U \wedge (U \wedge X)$$

L'interprétation géométrique est évidente : A est une rotation d'angle ω d'axe U.

Groupe de Lie des matrices de Lorentz : application à la relativité restreinte

Préliminaire

En relativité restreinte le mouvement d'une particule inertielle par rapport à un observateur inertiel est caractérisé par une transformation dite de Lorentz-Poincaré. Concrètement cela se traduit par une matrice d'ordre 4 appartenant au sous-groupe des matrices de Lorentz de déterminant +1 et orthochrones (qui transforment les vecteurs de genre temps orienté vers le futur en vecteur de même genre avec la même orientation).
Cette matrice définit aussi le passage entre deux repères orthonormés de l'espace vectoriel de Minkowski l'un étant le repère de l'observateur inertiel, le second celui de la particule. Les colonnes d'une telle matrice sont donc formées par la quadrivitesse, vecteur unitaire de genre temps et de trois vecteurs de genre espace définissant l'espace physique de la particule (espace des points voisins de la particule et qui sont au repos par rapport à celle-ci).

Qu'en est-t-il lorsque la particule observée n'est pas inertielle? Les définitions précédentes sont établies dans le cadre d'un espace linéaire avec des coordonnées rectilignes et une métrique de Minkowski. Aussi peut-on étendre cela dans le cadre de la relativité générale?

On se doute que le mouvement relatif entre deux particules est caractérisé par une fonction du temps à valeurs dans le groupe des transformations de Lorentz. Ceci nous amène à introduire l'idée de boost tangent le long d'une ligne d'univers et d'en analyser les conséquences.

Notons par $\mathfrak{M}$ l'espace affine de dimension 4 d'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Minkowski

$$\eta = \text{diagonale}(-1, 1, 1, 1).$$

On note par $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire des deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^4$ et on rappelle que l'on a trois types de vecteur, le genre temps, le genre lumière et le genre espace selon que leur carré scalaire est respectivement négatif, nul et positif.

A toute particule inertielle P (particule libre de toute influence extérieure) correspond une géodésique de $\mathfrak{M}$ c'est à dire une droite affine de vecteur directeur unitaire τ de genre temps : $\langle \tau, \tau\rangle = -1$. Cette droite, d'espace vectoriel $\mathbb{R}\tau$, est la ligne d'univers de P (notée $\mathcal{L}$P). Le vecteur τ définit la quadrivitesse de P. Notons par t l'abcisse curviligne de la ligne : t définit le temps propre de P.

Notons par E_τ le sous espace vectoriel supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}\tau$ telque $E = \mathbb{R}\tau \oplus E_\tau$. Les vecteurs de E_τ sont du genre espace et le sous espace affine (P, E_τ) de $\mathfrak{M}$ qui est un hyper-plan affine de dimension 3, définit l'ensemble des évènements simultanés à P cest à dire aussi l'espace physique de P, ou encore l'ensemble des points qui sont au repos par rapport à P. Les lignes d'univers de ces points sont des droites parrallèles à $\mathcal{L}$P....

On définit le repère de P par $\mathcal{R}_P = (P, \tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant une base orthonormée de E_τ et par (t, x, y, z) du point courant voisin de P.

Cette description est valable pour toute particule inertielle. Il convient de s'en rappeler!

Soit Q une particule inertielle qui n'est pas au repos par rapport à P, de ligne d'univers $\mathcal{L}$Q et soit (t, x, y, z) ses coordonnées relativement à P. Alors par la même description on a nécessairement, en notant τ_1 sa quadrivitesse et par t_1 le temps propre de Q (abcisse curviligne de $\mathcal{L}$Q) :

$$\tau_1 = \frac{dQ}{dt_1} = \gamma\,\tau + \vec{V},$$

$\vec{V}$ étant un vecteur d'espace, $\vec{V} \in E_\tau$. Quitte à faire une rotation d'espace dans $\mathcal{R}$P on peut choisir le vecteur $\vec{i}$ dans la direction de $\vec{V}$ et poser $\vec{V} = \gamma\, u\, \vec{i}$.

Le coeficient $\gamma = \frac{dt}{dt_1}$ définit le facteur de Lorentz.

Le vecteur d'espace $\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt_1}, 0, 0\right)$ est la vitesse défine à partir du temps propre t_1 et $u\vec{i}$ est la vitesse de Q observée par P avec son horloge : $u = \frac{dx}{dt}$.

Puisque τ_1 est unitaire on déduit la relation entre u et γ :

$$\tau_1 = (\gamma, \gamma u, 0, 0)$$

$$Q(t_1) = (\gamma\, t_1,\ \gamma\, u\, t_1 + x0,\ y0,\ z0)$$

$$\langle \tau_1, \tau_1\rangle = \gamma\left\langle \tau + u\,\vec{i},\ \tau + u\,\vec{i}\right\rangle = 1 \Rightarrow \gamma^2\,(1 - u^2) = 1.$$

Ensuite nous avons la décomposition $E = \mathbb{R}\tau_1 \oplus E_{\tau_1}$ puis un repère orthonormé $\mathcal{R}_Q = (Q, \tau_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ le long de $\mathcal{L}Q$.
Puisque les bases de $\mathbb{R}\tau \oplus E_\tau$ et de $\mathbb{R}\tau_1 \oplus E_{\tau_1}$ sont orthonormées la matrice de passage L vérifie la relation qui en définit une matrice de Lorentz : $^T L . \eta . L = \eta$.

Remarquons que la matrice de Lorentz n'est pas unique. Une rotation d'espace dans $\mathcal{R}$P ou dans $\mathcal{R}$Q revient à multiplier L à gauche ou à droite par une matrice de Lorentz R définisant une rotation pure.

Cependant on peut mettre en évidence une matrice de Lorentz paticulière B, celle qui correpond à la transformation de Lorentz-Poincaré. La matrice B définit ce qu'on appelle un boost. Cette matrice a la particularité de laisser un 2-plan invariant orthogonal supplémentaire d'un 2-plan de genre temps qui est le plan de la transformation de Lorentz-Poincaré.

Soit L une des matrices de Lorentz en question, il est facile de déterminer la matrice B car on sait par ailleurs que toute matrice de Lorentz peut se décomposer en un produit à droite d'un boost par une rotation pure R.

Du point de vue de l'observateur P il est facile de calculer le boost de la particule Q. Il sufit de considérer la base (τ_1, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) (c'est bien sûr une base puisque ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est une base d'espace et que τ_1 est de genre temps) et de l'orthonormaliser par le processus d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt en partant du vecteur τ_1. On obtient ainsi une base de $E = \mathbb{R}\tau_1 \oplus E_{\tau_1}$. Ensuite par le théorème de décomposition on déduit la matrice B.
L'usage du processus d'orthonormalisation va s'avérer trés utile dans les cas plus délicats où le système de coordonnées n'est pas rectiligne où encore dans le cas d'une particule non inertielle et par la suite en relativité générale.

Le groupe de Lie des matrices de Lorentz et son algèbre de Lie

1°) Considérons le groupe des matrices de Lorentz spéciales et orthochrones que nous noterons par la lettre $\mathfrak{S}$, nous avons un sous-groupe de Lie du groupe de Lie des matrices de Lorentz. La variété correspondante est la sous-variété de dimension 6 de $\mathbb{R}^{16}$ définie par les dix équations qui traduisent la relation matricielle $^T S . \eta . S = \eta$ où l'on a successivement $S = (s_{ij})$, s_{ij} sont les coordonnées de $\mathbb{R}^{16}$ et $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

$\mathfrak{S}$ agit sur l'espace vectoriel de Minkowski $\mathfrak{M} = (\mathbb{R}^4, \eta)$ en tant que le groupe de ses isométries.

2°) Nous approchons l'algèbre de $\mathfrak{A} = T_{e=I}$ de $\mathfrak{S}$ par la translation à gauche $L_{S^{-1}}$ des vecteurs tangente en S de la variété (ou encore par la translation à droite $R_{S^{-1}}$).
Soit $t \longmapsto S(t)$ une courbe différentiable sur la variété, $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$ son vecteur tangent, alors le vecteur de l'algèbre de Lie $DL_{S^{-1}}(\dot{S})$ s'écrit :

$$\epsilon = DL_{S^{-1}}(\dot{S}) = L_{S^{-1}} . \dot{S} = S^{-1} . \dot{S} \in T_I$$

De la relation ${}^{T}S.\,\eta.\,S = \eta$ on déduit $S^{-1} = \eta\,.{}^{T}S.\,\eta$ et le tenseur antisymétrique covariant à deux indices $\Omega = {}^{T}S.\,\eta\,.\,\dot{S}$ (déduit en dérivant par rapport à t la relation ${}^{T}S.\,\eta.\,S$), si bien que le vecteur de l'algèbre de Lie s'écrit :

$$\epsilon = \eta\,.\,\Omega\,; \quad \Omega = {}^{T}S.\,\eta\,.\,\dot{S}$$

En conclusion l'algèbre de Lie de $\mathfrak{S}$ est l'espace vectoriel des matrices de la forme $\eta\,.\,\Omega$ où Ω est un tenseur covariant antisymétrique à deux indices.

Le tenseur antisymétrique du commutateur $[\epsilon1, \epsilon2]$ est $\Omega1.\,\eta\,.\,\Omega2 - \Omega2\,.\,\eta\,.\,\Omega1$

3°) L'application exponentielle de l'algère dans le groupe, $\epsilon \longmapsto \text{Exp}\,(\epsilon) = \sum \frac{\epsilon^{k}}{k\,!}$ définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{3}\Diamond$ B
(où B est la boule ouverte de rayon π dans $\mathbb{R}^{3}$) sur son image.

Théorème
Pour toute matrice $\epsilon = \eta.\Omega$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ et telle que A.B ≠ 0, il exite une base η-orthonormée dans laquelle ϵ prend la forme réduite :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$$

où α et ω sont deux nombres réels.
Si A.B = 0 On a les trois formes réduites suivant les trois conditions : $A^2 - B^2 > 0$, $A^2 - B^2 < 0$, $A^2 - B^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corollaire
Pour toute matrice S du groupe de Lie des matrices de Lorentz spéciales et orthochrones il existe une base
η-orthonormée dans laquelle A prend la forme réduite :

$$\begin{pmatrix} \text{Cosh}[\alpha] & -\text{Sinh}[\alpha] & 0 & 0 \\ -\text{Sinh}[\alpha] & \text{Cosh}[\alpha] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Cos}[\omega] & -\text{Sin}[\omega] \\ 0 & 0 & \text{Sin}[\omega] & \text{Cos}[\omega] \end{pmatrix}$$

A est un produit commutatif d'un boost et d'une rotation dans un plan supplémentaire η-orthogonal à celui du boost.

Description des particules inertielles en relativité restreinte

$\mathfrak{S}$ agit sur $\mathfrak{M} = (\mathbb{R}^4, \eta)$ en tant que que le groupe de ses isométries = groupe des matrices qui conservent la métrique η.

Considérons une matrice S constante du groupe $\mathfrak{S}$ (un point de $\mathfrak{S}$) ayant la forme d'un boost, elle caractérise le rapport entre deux particules inertielles O et M sachant que le mouvement de M par rapport à O est défini par une transformation de Lorentz-Poincaré.
S définit aussi la matrice de passage entre deux bases orthonormées (e) et (E), de deux repères (O, e) et (M, E), le premier étant considéré comme le repère d'une particule inertielle O qui observe la particule M de repère (M, E). leur ligne d'univers sont respectivement L_0 et L_M, ce sont deux droites géodésiques de $\mathfrak{M}$ de vecteurs directeurs leur quadrivitesse, ayant pour composantes dans (e) (1, 0, 0, 0) pour O et la première colonne de S pour M. Dans ce cas particulier la matrice S étant constante son vecteur de l'algèbre de Lie est nul.

c'est le cadre classique de la relativité restreinte.

Description des particules inertielles et non inertielles en relativité restreinte et générale
boost tangent le long d'une ligne d'univers

1°)

La description d'une particule inertielle dans $\mathfrak{M}$ peut se faire tout aussi bien lorsque le système de coordonnées n'est pas rectiligne. Le repère de référence sera en chaque point M de la ligne d'univers L_M le repère (M, e) où (e) est la base naturelle associée au système de coordonnées.
Bien entendu il y a une transformation de Lorentz-Poincaré sous-jacente.
pour la mettre en évidence il suffira d'éxécuter les trois opérations suivantes :

En chaque point M la ligne d'univers :

a) La métrique associée aux coordonnées n'étant plus nécessairement η mais ayant la même signature, on calcule la base η-orthonormée à partir de la base naturelle (M,e).
Nous notons (M, E) = (M, Et, E1, E2, E3) ce repère orthonormé

b) QV étant la quadrivitesse de M définie par ses composantes dans (M,E) On construit la base η-orthonormée
(QV,F1,F2,F3) en orthonormalisant par la méthode de Gramm-Schmidt la **base** (QV, E1, E2, E3) à partir du premier vecteur QV.

c) La matrice de passage de (E) à (F) est une matrice de Lorentz L qui se décompose en un produit B.R. On récupère le boost B par la décompostion de L.

Voir schéma 1

2°)

Pour particule non inertielle la ligne d'univers L_M n'est plus une droite. On sort maintenant du cadre classique précédent. Il devient nécessaire de définir le boost tangent le long de la ligne d'univers L_M sachant qu'elle est caractérisée par une transformation de Lorentz en chacun de ses points.

On utilise la construction précédente (Voir schéma 1), précisons la signification des différentes matrices et les principales relations :

P = matrice de passage de (e) à (E) : $^{T}P \,.\, G \,.\, P = \eta$

S = Matrice de Lorentz obtenue par l'orthonormalisation : S = B.R ; $^{T}B \,.\, \eta \,.\, B = \eta$
B définit le boost tangent en M à L_M.

$\mathcal{J}$ = isométrie de $\mathfrak{M}$ par rapport à la métrique associée aux coordonnées : $\mathcal{J} = P.\,B.\,P^{-1}$ et $^{T}\mathcal{J} \,.\, G \,.\, \mathcal{J} = G$

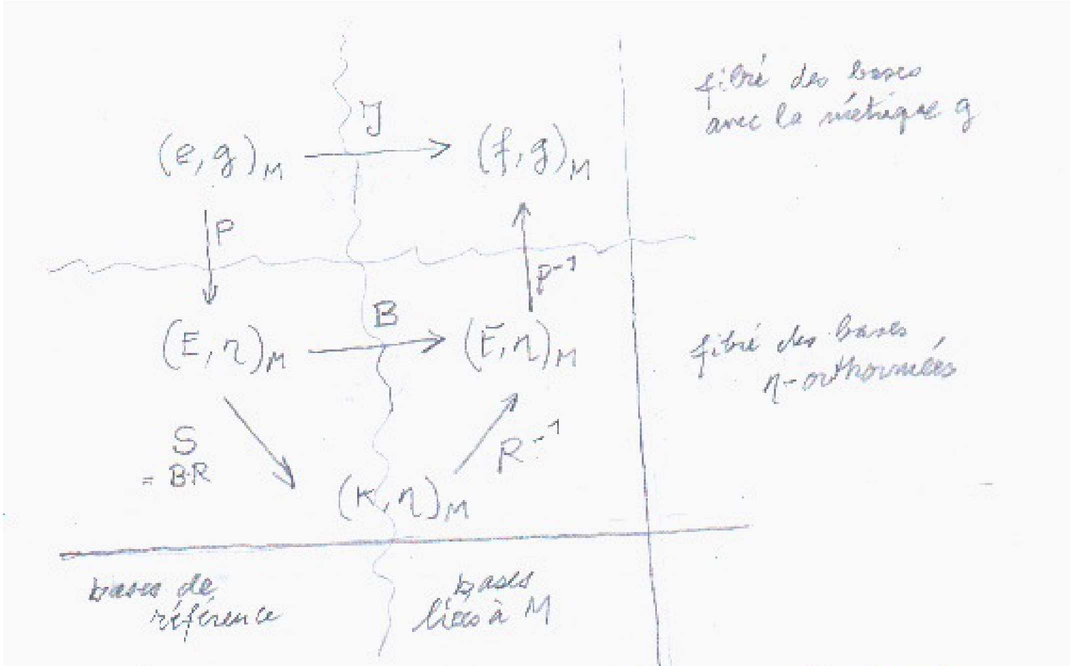
d) Le calcul de ϵ, vecteur de l'algèbre de Lie se fait à partir de la carte initiale.

Il s'agit de calculer le tenseur antisymétrique $^{T}B \,.\, \eta \,.\, D_{qV} B$, il se fait dans la carte initiale en posant

$$\Phi = {}^{T}\mathcal{J} \,.\, G \,.\, D_{qV}\, \mathcal{J}$$

où $D_{qV}\, \mathcal{J}$ est la dérivée covariante du tenseur mixte $\mathcal{J}$ dans la direction qV, ensuite on obtient Ω par le changement de bases : $\Omega = P \,.\, \Phi \,.\, {}^{T}P$; $\epsilon = \eta \,.\, \Omega$

schéma 1



S = matrice de Lorentz obtenue par l'orthonormalisation de la base (QV, E_1, E_2, E_3)

R = rotation pure de la décomposition de S.

$B = S.R^{-1}$ = boost tangent en M à la ligne d'univers

J = isométrie de (M, g) associée à B ; $J = P.B.P^{-1}$

$\phi = {}^TJ.\,G.\,D_{qv}J$ = calcul dans $(e,g)_M$ de $\Omega = {}^TB.\eta.D_{QV}B$

$\Omega = P.\phi.{}^TP$

$E = \eta.\Omega$ = "vecteur" de l'algèbre de Lie.

Règle de dérivation d'un point voisin de M (ou d'un vecteur) défini par ses coordonnées dans (F)

Soient x et X les coordonnées d'un point P voisin de M dans les deux bases (e) et (F). Dérivons la relation
x = B∘X par rapport à t (ou τ le temps propre de M), par la translation à gauche $L_{B^{-1}}$

$$B^{-1} \circ \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} + B^{-1} \circ \frac{dB}{dt} \circ X$$

on obtient la relation vectorielle par ses composantes dans (F) :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_E = \left(\frac{dP}{dt}\right)_F + \Lambda \circ X \; ; \quad \Lambda = \eta \circ \Omega \; ; \quad \Omega = {}^TB \circ \eta \circ DB$$

Examinons de près les coefficients de du tenseur Ω : Pour X = (1, 0, 0, 0), X définit la quadriv-

itesse de M par ses composantes dans (F), on obtient alors la quadriaccélération A de M par ses composantes contravariantes dans (F) qui est de la forme (0, a1, a2, a3), car A est la première colonne de Ω. A est un vecteur d'espace.
le 4-vecteur A correspond à une partie de Ω que je note Ω_A

$$\Omega_A = \begin{pmatrix} 0 & a1 & a2 & a3 \\ -a1 & 0 & 0 & 0 \\ -a2 & 0 & 0 & 0 \\ -a3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

considérons la différence $\Omega_R = \Omega - \Omega_A$, alors Ω_R est de la forme :

$$\Omega_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b3 & b2 \\ 0 & b3 & 0 & -b1 \\ 0 & -b2 & b1 & 0 \end{pmatrix}$$

et prenons pour X le 4-vecteur d'espace constant (0, p1, p2, p3) alors le produit $\Omega_R \circ X$ donne le produit vectoriel dans l'espace physique de M des deux vecteurs d'espace ω et Y où ω = (b1, b2, b3) et Y = (p1, p2, p3) : le vecteur d'espace ω définit la rotation instantanée du repère d'espace physique de M.

règle de dérivation :

Soit U un 4-vecteur de composantes dans (F) : U = (a_0, W) = a_0 qV + W où a_0 et W, vecteur d'espace, sont constants

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_E = \Lambda \circ U = (qV \, . \, U)\, A - (A \, . \, U)\, qV + \omega \times W$$

c'est la formule définie par Gourgoulhon dans son livre "Relativité restreinte" (P 89) .
Les deux premiers termes sont par définition la dérivée de Fermi-Walker de du quadrivecteur U que l'on peut aussi écrire (en notant par qV^* et A^* les composantes covariantes de qV et A) :

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_E = \Lambda \circ U = (qV^* \wedge A^*) \circ U + \omega \times W$$

Exemple mouvement circulaire de l'électron autour d'un noyau

Programme d'orthonormalisation et de calcul de B, $\mathcal{J}$, Φ, Ω

Carte de Minkowski en coordonnées cylindriques

```
d1 = {t, r, θ, z};
d2 = DiagonalMatrix[{-1, 1, r^2 , 1}];
Carte[d1, d2]
```

```
------------------------   Résumé   ---------------------------
Variables globales disponibles : DimE, coordonnées, Gcov, Gcontr, detg
```

coordonnées : {t, r, θ, z}

métrique : $\text{Gcov} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \text{Gcontr} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on peut utiliser les notations suivantes pour les bases
dans l'algèbre tensorielle et extérieure sur la présente carte

BaseV[1] = $\{e_t, e_r, e_\theta, e_z\}$

BaseV[2][[{1,2,3}]] = $\{e_t \otimes e_t, e_t \otimes e_r, e_t \otimes e_\theta\}$

BaseD[2][[2]] = $dt \otimes dr$

BaseD[DimE][[DimE^2]] = $dt \otimes dt \otimes dz \otimes dz$

BaseFD[DimE] = $\{dt \wedge dr \wedge d\theta \wedge dz\}$

....

puis utiliser la Fonction Bases[n] (n=nombre d'éléments
dans un produit) pour remplacer les symboles par leur valeurs

exemples : e_t/.Bases[1] = {1, 0, 0, 0}

$e_t \wedge e_r$/.Bases[2] = {1, 0, 0, 0, 0, 0}

quadrivitesse de l'électron

La ligne d'univers de M est une hélice d'axe e_t. On note respectivement par qV et qA la quadrivitesse et la
quadriaccélération de M, $qV = \frac{dM}{d\tau}$, τ = temps propre de *M*.

La quadrivitesse est donnée par ses composantes dans le repère naturel en M :
(e) = $\{e_t, e_r, e_\theta, e_z\}$

Γ est le facteur de Lorentz, $\Gamma = \frac{dt}{d\tau}$.

ω est la rotation uniforme de M, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

```
SetAttributes[{Γ, ω}, Constant]
qV = Γ {1, 0, ω, 0};
PScal[qV, qV] == -1 // FullSimplify
```

$1 + r^2 \Gamma^2 \omega^2 == \Gamma^2$

```
qA = Dcov[qV, qV]
```

$\{0, -r\,\Gamma^2 \omega^2, 0, 0\}$

Calcul du boost tangent B

La matrice P définit la base orthonormée (E) = (E_t, E_r, E_θ, E_z). Notons par QV les composantes de qV dans (E). On obtient le boost tangent au point M en orthonormalisant la base (QV, E_r, E_θ, E_z). Le résultat est une matrice de Lorentz S à priori produit d'un boost B et d'une rotation R. On obtient R au moyen du programme de décomposition.
B est le boost tangent en M à la ligne d'univers.

```
base = Prepend[Drop[P, 1], Inverse@P.qV] // PowerExpand // FullSimplify
```

$$\left\{\{\Gamma, 0, r\,\Gamma\,\omega, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}, \left\{0, 0, \frac{1}{r}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 1\}\right\}$$

$$\left(\mathbf{S = OrthSchmidt[base]\ /.\ } \sqrt{\frac{1}{r^2 - r^4\,\omega^2}} \to \Gamma / r\ //\ \mathbf{PowerExpand}\right)\ //\ \mathbf{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma & 0 & r\,\Gamma\,\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r\,\Gamma\,\omega & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{R = DecL[S][[1]]}\ /.\ r^2\,\Gamma^2\,\omega^2 \to \Gamma\text{^}2 - 1\ //\ \mathbf{FullSimplify}\right)\ //\ \mathbf{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(B = S.Transpose@R) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \Gamma & 0 & r\,\Gamma\,\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r\,\Gamma\,\omega & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le plan invariant est (E_r, E_z). Le plan supplémentaire orthogonal est le plan de genre temps (E_t, E_θ) = plan de la transformation de Lorentz-Poincaré.

Calcul directe de B par le programme défini plus haut. Attention la variable d'entrée est la quadrivitesse définie dans (e)

$$\left(\mathbf{B = Boost[qV]}\ /.\ r^2 - r^4\,\omega^2 \to r\text{^}2 / \Gamma\text{^}2\ /.\ r^2\,\Gamma\,\omega^2 \to \Gamma - 1/\Gamma\ //\ \mathbf{FullSimplify}\right)\ //\ \mathbf{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma & 0 & r\,\Gamma\,\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r\,\Gamma\,\omega & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul du tenseur antisymétrique Ω

Le calcul de Ω doit passer par celui de Φ car c'est dans la carte initiale que la dérivée covariante est définie.

On rappelle la définition de Φ : $\mathcal{J}$ étant l'isométrie associée à B : $\mathcal{J}$ = P. B. P^{-1} on a

$$\Phi = {}^{T}J \,.\, G \,.\, D_{qV}\,(J)$$
$$\Omega = {}^{T}B \,.\, G \,.\, D_{qV}\,(B) = P \,.\, \Phi \,.\, {}^{T}P$$

```
(J = P.B.Inverse@P // PowerExpand // FullSimplify) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \Gamma & 0 & r^2\,\Gamma\,\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Gamma\,\omega & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dérivée covariante de $\mathcal{J}$ dans la direction qV

```
DJ = ElevI[DcovT[qV, AbaisI[J, 1], "cov"], 1] // FullSimplify
```

$$\left\{\{0, -r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, 0\}, \{-r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, -r\,(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega, 0\}, \left\{0, -\frac{(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega}{r}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\}$$

```
(Φ = (Transpose@J.Gcov.DJ // FullSimplify) /. -1 + r^2 ω^2 → -1 / Γ^2 //
    FullSimplify) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & r\,\Gamma^2\,\omega^2 & 0 & 0 \\ -r\,\Gamma^2\,\omega^2 & 0 & -r\,(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega & 0 \\ 0 & r\,(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(Ω = P.Φ.Transpose@P // PowerExpand) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & r\,\Gamma^2\,\omega^2 & 0 & 0 \\ -r\,\Gamma^2\,\omega^2 & 0 & -(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega & 0 \\ 0 & (-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où Λ la matrice de l'algèbre de Lie :

```
(Λ = η.Ω) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -r\,\Gamma^2\,\omega^2 & 0 & 0 \\ -r\,\Gamma^2\,\omega^2 & 0 & -(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega & 0 \\ 0 & (-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la quadriaccélération A

composantes de la quadriaccélération dans (F), (E) et (e)

```
A = Λ.{1, 0, 0, 0}
```

$$\{0, -r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, 0\}$$

```
B.A
```

$\{0, -r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, 0\}$

```
Inverse@P.B.A
```

$\{0, -r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, 0\}$

```
A == Dcov[qV, qV]
```

True

Vecteur rotation instantanée de Thomas

```
CompStr[Mink.Ω]
```

$\{-r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, 0, -(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega, 0, 0\}$

```
Vr = -%[[{6, 5, 4}]]
```

$\{0, 0, (-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega\}$

Vecteur rotation instantanée défini par ses composantes dans (F) et défini par apport à la base de référence
et ψ = rotation de l'espace physique de l'électron sur une période :

```
VR = Vr / Γ
```

$\{0, 0, (-1+\Gamma)\,\omega\}$

Intégrons par rapport t sur une période entre t = 0 et t = 2 π/ω on obtient la rotation ψ (du boost) autour de e_z

```
ψ = Integrate[(-1 + Γ) ω, {t, 0, 2 π / ω}]
```

$2\,\pi\,(-1+\Gamma)$

étude approfondie de la matrice Λ

les vecteurs A1 et B1 de Λ sont orthogonaux. on va déterminer la forme réduite de Λ

```
Λs = CompStr[Λ]
```

$\{-r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, 0, -(-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega, 0, 0\}$

```
A1 = Λs[[{1, 2, 3}]]
```

$\{-r\,\Gamma^2\,\omega^2, 0, 0\}$

```
B1 = -Λs[[{6, 5, 4}]]
```

$\{0, 0, (-1+\Gamma)\,\Gamma\,\omega\}$

Λ admet la valeur propre double 0 et deux valeurs propres réelles opposées

```
CharacteristicPolynomial[Λ, x] // FullSimplify
```

$x^2 \left(x^2 + (-1+\Gamma)^2 \Gamma^2 \omega^2 - r^2 \Gamma^4 \omega^4\right)$

```
(Eigenvalues[Λ] // Simplify) /. Γ^2 (-1 + r^2 ω^2) → -1 // FullSimplify
λ1 = %[[4]]
```

$\left\{0,\ 0,\ -\Gamma \sqrt{-2+2\,\Gamma}\ \omega,\ \Gamma \sqrt{-2+2\,\Gamma}\ \omega\right\}$

$\Gamma \sqrt{-2+2\,\Gamma}\ \omega$

Forme réduite de Λ

Pour avoir la forme réduite de Λ il est commde de passer par l'étude des directions propres de la matrice $\Delta = \Lambda^2$ et d'en déduire ensuite une base η-orthonormée dans laquelle Λ a la forme réduite.

```
(Δ = Λ.Λ) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} r^2 \Gamma^4 \omega^4 & 0 & r(-1+\Gamma)\Gamma^3\omega^3 & 0 \\ 0 & -(-1+\Gamma)^2\Gamma^2\omega^2 + r^2\Gamma^4\omega^4 & 0 & 0 \\ -r(-1+\Gamma)\Gamma^3\omega^3 & 0 & -(-1+\Gamma)^2\Gamma^2\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
CharacteristicPolynomial[Δ, x] // FullSimplify
```

$x^2 \left(x + (-1+\Gamma)^2 \Gamma^2 \omega^2 - r^2 \Gamma^4 \omega^4\right)^2$

```
(Eigenvalues[Δ] // Simplify) /. Γ^2 (-1 + r^2 ω^2) → -1 // FullSimplify
```

$\left\{0,\ 0,\ 2\,(-1+\Gamma)\,\Gamma^2\omega^2,\ 2\,(-1+\Gamma)\,\Gamma^2\omega^2\right\}$

D'une manière générale soient Ω le tenseur antisymétrique formé à partir des deux vecteurs d'espace A et B, $\Lambda = \eta \circ \Omega$ la matrice de l'algèbre de Lie et enfin $\Delta = \Lambda^2$ alors si A.B $\neq$ 0, le polynôme caractéristique de Δ admet deux valeurs propres doubles réelles et de signes opposés. Les deux plans propres sont suppémentaires et η-orthogonaux. Le plan propre associé à la valeur propre négative est du genre espace l'autre (associé à la valeur propre positive) est du genre temps. On peut donc déterminer une base η-orthonormée dans laquelle Δ est diagonale et Λ a la forme réduite du théorème cité plus haut.

Dans l'exemple de l'électron A.B = 0, le polynôme caractéristique de Δ admet deux valeurs propres doubles 0 et $2\,(-1+\Gamma)\,\Gamma^2\omega^2 > 0$. On obtient la base η-orthonormée par le calcul suivant :

```
MVp = Eigenvectors[Δ] /. r → u / ω
```

$\left\{\{0,\ 0,\ 0,\ 1\},\ \left\{-\frac{-1+\Gamma}{u\,\Gamma},\ 0,\ 1,\ 0\right\},\ \left\{-\frac{u\,\Gamma}{-1+\Gamma},\ 0,\ 1,\ 0\right\},\ \{0,\ 1,\ 0,\ 0\}\right\}$

recherche d'une base η-orthormée :

matrice de passage et expression réduite de Λ

sous-groupe à un paramètre définissant le mouvement de l'électron

```
(MP = Transpose@{W1, W2, W3, W4}) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{u\,\Gamma}{\sqrt{2}\,\sqrt{-1+\Gamma}} & 0 & -\frac{\sqrt{-1+\Gamma}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{-1+\Gamma}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{u\,\Gamma}{\sqrt{2}\,\sqrt{-1+\Gamma}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(Transpose@MP.η.MP // Together) //. u^2 Γ^2 → Γ^2 - 1 // FullSimplify
```

{{-1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

d'où la forme réduite $\Lambda 0$ de la matrice Λ. Le coefficient de $\Lambda 0$ est manifestement positif on a donc une matrice (de l'algèbre de Lie) d'une transformation de Lorentz-Poincaré
Rappelons que $\Lambda 0$ est une dérivée par rapport à t et qu'elle est constante on a donc à faire à un sous groupe à un paramètre t du groupe spécial des transformations de Lorentz : L(t) = exp(s $\Lambda 0$), s = $\frac{t}{\Gamma}$ étant le temps propre.

```
(Λ0 = (Inverse@MP.Λ.MP /. r → u / ω) /. u^2 → 1 - 1 / Γ^2 // Simplify) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\,\sqrt{-1+\Gamma}\,\Gamma\,\omega & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\,\sqrt{-1+\Gamma}\,\Gamma\,\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(L[t_] = MatrixExp[Λ0 t / Γ] // FullSimplify) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cosh}\left[\sqrt{2}\,t\,\sqrt{-1+\Gamma}\,\omega\right] & \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{2}\,t\,\sqrt{-1+\Gamma}\,\omega\right] & 0 & 0 \\ \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{2}\,t\,\sqrt{-1+\Gamma}\,\omega\right] & \mathrm{Cosh}\left[\sqrt{2}\,t\,\sqrt{-1+\Gamma}\,\omega\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suite :
Application à la relativité générale
avec l'exemple de Mercure