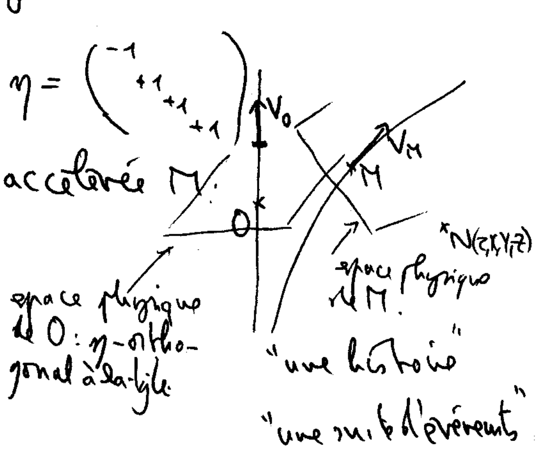
Michel Langlois.
13/10/2016

Une q de fond en RR qui va nous servir en RG : le boost tangent.

Lorentz-Poincaré. Le boost inverse. " Si B se déplace / A à vitesse $\vec{v}$ alors A ——— / B ——— $-\vec{v}$. "
Ce n'est pas juste

Partons de l'espace de Minkowski : $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, \eta)$ métrique $\quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$

Considérons la ligne d'univers d'une particule accélérée M.
O inertiel.



$\mathcal{R}_O = (O ; \underset{\underset{V_0}{"}}{e_0}, e_1, e_2, e_3)$

vecteur de genre temps $\langle V_0, V_0 \rangle < 0$
espace $\langle W, W \rangle > 0$
lumière $\langle L, L \rangle = 0$

Si je norme le vecteur tangent à 1, je paramètre la courbe par le temps propre.

$\mathcal{R}_M = (M, \underset{\underset{V_M}{"}}{E_0}, E_1, E_2, E_3)$

$M(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$

$ON(\tau) = OM(\tau) + LMN$

${}^tL \eta L = \eta$: L appartient au groupe des matrices de Lorentz.
groupe de Poincaré : (T, L).

Ici, une matrice L unique se dévoile :
(V_M, e_1, e_2, e_3) : donc c'est un système libre. Le processus d'orthonormalisation
$\underbrace{V_M}_{\text{genre temps}}, \underbrace{e_1, e_2, e_3}_{\text{genre espace}}$
fait apparaître $L = B_M = B(V_M)$: c'est le boost $\begin{pmatrix} \gamma t & {}^tV \\ \gamma V & I_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} V\,{}^tV \end{pmatrix}$

$V = (p, q, r)$

$\gamma = \frac{dt}{d\tau}$

⚠ ${}^tV V$ est le produit scalaire
$V{}^tV = V \otimes V$

et $V_M = \frac{dM}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}(1, p, q, r)$
$p = \frac{dx}{dt}$.

${}^tB\, \eta\, B = \eta$.

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,{}^tV \\ -\gamma V & I_3 + V \otimes V \end{pmatrix}$

B_M est une f^{n} de τ. $\Lambda_M = \overbrace{B_M^{-1} \frac{dB_M}{d\tau}}^{} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tA \\ A & \boxed{\tilde{\Lambda}_M} \end{pmatrix}$ $\tilde{\Lambda}_M$ matrice antisymétrique
: matrice fabriquée pour être dans le groupe de Lie. vecteur tangent qu'on ramène sur l'origine.

Diaporama mathematica : à $t=\tau=0$, $O_0=(0,0,0,0)$: origine commune.

Données : γ, $V=(p,q,r)$

$$M_0=(0,\overset{0}{x_0},\overset{0}{y_0},\overset{0}{z_0}).$$

$$M_\tau=\gamma\tau(1,p,q,r).$$

$V_0=(1,0,0,0)$

$$O_t=(t=\gamma\tau,0,0,0).$$

$$B_M=\begin{array}{cc} E_0=V_M & \underline{E_1,\ E_2,\ E_3} \\ \end{array}\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\,{}^tV \\ \gamma V & I_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}V\,{}^tV\end{pmatrix}$$

Ici, $q=r=0$.

Considérons le point d'intersection de l'espace physique de M_τ avec la ligne d'univers de O.

Soit $W_Q=M_\tau Q=(0,X_Q,Y_Q,Z_Q)$: $O_0M_\tau+B_M\cdot W_Q=O_0Q_\tau=(t_Q,0,0,0)$.
= coordonnées de Q ds le repère de M.

$$t_Q(\tau)=\frac{\tau}{\gamma}-\langle O_0M_0,V_M\rangle$$

$$W_Q=B_M^{-1}M_\tau Q_\tau.$$

$$W_Q(\tau)=\left(\frac{\gamma\langle O_0M_0,V_M\rangle}{1+\gamma}-\tau\right)V-O_0M_0$$

Q décrit la ligne d'univers de O avec un temps ~~différent de celui de O.~~

$$Q_\tau=(\tau,W_Q)$$

Propriété : Pour M, ds son repère en M_0, $\tau\longmapsto Q_\tau=(\tau,X_Q,Y_Q,Z_Q)$ est la ligne d'univers de Q et la quadrivitesse est $V_Q=\gamma\frac{dQ_\tau}{d\tau}=\gamma(1,-V)$ avec le boost $B_Q=B_M^{-1}$. Le temps propre de Q est le temps t de O.

$T_Q=\frac{dQ}{d\tau}=(1,-V)$. $V_Q=\gamma T_Q$

$\frac{d\tau}{dt}$ donnant γ

$$B_M^{-1}=\begin{pmatrix}0, & \gamma\,{}^tV \\ \gamma V & I_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}V\,{}^tV\end{pmatrix}=B_Q=\text{le boost de }Q\text{ par rapport au repère de }M.$$

Le temps propre de Q par rapport à M est le temps de O.

Considérons un mouvement uniformément accéléré : $\tau\longmapsto B_M(\tau)$

$$\Lambda_M=\begin{bmatrix}0 & a\ b\ c \\ \begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix} & \boxed{0}\end{bmatrix}\text{ et }B_M=e^{\tau\Lambda}=\left(\begin{array}{cc|c}\mathrm{ch}(a\tau) & \mathrm{sh}(a\tau) & 0 \\ \mathrm{sh}(a\tau) & \mathrm{ch}(a\tau) & \\ \hline & 0 & I_2\end{array}\right)$$

$$M(\tau)=\left(\frac{\mathrm{sh}(a\tau)}{a},\frac{\mathrm{ch}(a\tau)-1}{a},0,0\right)$$

$$t_Q(\tau)=\frac{\mathrm{th}(a\tau)}{a}$$

$$X_Q=\frac{\frac{1}{\mathrm{ch}(a\tau)}-1}{a}$$

~~Dans le repère de M en M0~~

Changement de coordonnées de Rindler (cf. Gourgoulhon).

coordonnées inertielles : $CI=(t,x,y,z)$

de Rindler $CR=(\tau,X,Y,Z)$

Soit $N=(0,X,Y,Z)$ un point de l'espace physique de M : $MN=(0,X,Y,Z)$

Le chgt de coordonnées vers O : $ON=OM(\tau)+B_M(\tau)\cdot MN$ associé à la ligne d'univers de M.

La carte de Rindler ... un argument qui n'est pas ..