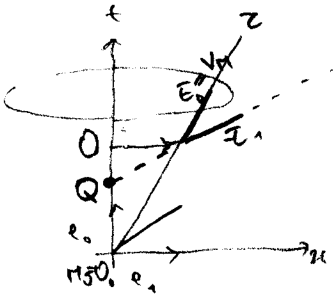
Michel Langlois

Epiphymaths

20/10/2016

Suggestion : inviter Carlo Rovelli



"L'histoire de M vue par O.

Quel rapport entre e-t de O et e-t de M

$$B_M = B(V_M) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\, {}^tV \\ \hline \gamma V & I_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} V\, {}^tV \end{array}\right) \qquad \gamma = \frac{dt}{d\tau} = \text{facteur de Lorentz vu par O.}$$

$V_M = \gamma(1, \mathbf{V})$, $\mathbf{V} = (v,0,0)$

γV : $\frac{dM}{dt}$ = vitesse mesurée par le temps de O

B_M = Θ de Lorentz de O vers M (toute matrice de L = boost ∘ rotation pure)

= matrice de passage : colonnes = vecteurs de M ds la base de O.

B_M^{-1} : B_M appartient au groupe de Lorentz et donc ${}^tB_M\, \eta\, B_M = \eta$.

$B_M^{-1} = B(\gamma(1,-V))$

Q et M simultanés pour le temps de M.

$B_M^{-1} = B_Q$ et $V_Q = \gamma(1,-V)$ avec ici $\gamma = \frac{d\tau}{dt}$ vu par M.

⚠ la ligne d'univers de Q est celle de O, mais avec une autre loi horaire !!

→ ramenée à 1 / M

Considérons maintenant un mouvement uniformément accéléré.

Notons $\mathcal{L}$ le groupe de Lie des matrices de Lorentz de det +1.

Soit $L(\tau) \in \mathcal{L}$. On a ${}^tL\, \eta\, L = \eta$ → on a 10 rel entre 16 coeff^s.

→ donc 6 d° de liberté.

→ variété à 6 dim. on est en train de décrire un arc dans cette variété.

$L' = \frac{dL}{d\tau}$.

Translations < à gauche / à droite

$\Lambda_g = L^{-1} L' \in T\mathcal{L}_e$

$\Lambda_d = L' L^{-1}$

$\mathcal{AL} \approx \mathbb{R}^6 \ni [\Lambda_1, \Lambda_2]$

"algèbre de Lie" crochet de Lie.

$\Lambda_1 = \eta\, \Omega_1$

$\Lambda_2 = \eta\, \Omega_2$

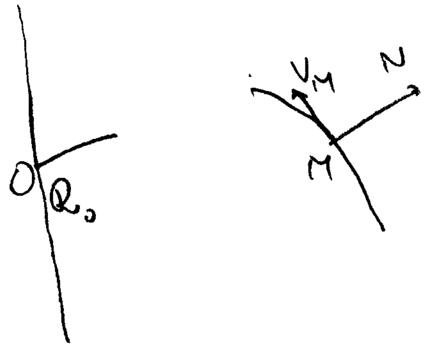
$[\Lambda_1, \Lambda_2] = \eta(\Omega_1 \eta \Omega_2 - \Omega_2 \eta \Omega_1)$.

$$\Lambda_g = \eta\, {}^tL\, \eta\, L' = \eta\, \Omega \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^tA \\ \hline A & \text{antisym } \omega\wedge. \end{array}\right)$$

$\frac{d}{d\tau}({}^tL\, \eta\, L) = 0$ et donc $\Omega + {}^t\Omega = 0$.

Considérons $\exp : \mathcal{AL} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Si Λ est constante, $L = e^{\tau \Lambda}$



$MN = (\tau, X, Y, Z)$

$$\xi_N = \xi_M + L_M \chi_N$$

$$\dot\xi_N = \dot\xi_M + \dot L_M \chi_N + L_M \dot\chi_N$$

$$\underbrace{L^{-1}\dot\xi_N}_{(V_N)_a} = \underbrace{L^{-1}\dot\xi_M + \Lambda_M \chi_N}_{(V_N)_e \,=\, \text{vitesse d'entraînement de } N} + \underbrace{\dot\chi_N}_{(V_N)_\Omega}$$

$(V_M)_a + \Lambda_M \chi$

$L^{-1}\dot L$: 1re colonne = accélération ds le repère de M.
et seule la 1re colonne de $\dot L$ intervient.

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

Analogue de l'accélération de Coriolis : $2\Lambda \dot\chi_N$

Démonstration de la formule du boost accéléré dans le cas du mvt unif. accéléré.

$$B_M = e^{\tau\Lambda} \qquad \Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a & 0 & 0 \\ \hline a & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$B_M : \frac{dB}{d\tau} = L\Lambda = \Lambda L \text{ et donc } L = \sum \frac{\tau^k \Lambda^k}{k!} = \left(\begin{array}{cc|cc} ch(a\tau) & sh(a\tau) & & 0 \\ sh(a\tau) & ch(a\tau) & & \\ \hline & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$O_0M(\tau) = \left(\frac{sh\, a\tau}{a}, \frac{ch\, a\tau - 1}{a}, 0, 0\right)$$

Détermination de Q : $t_Q(\tau) = \dfrac{th(a\tau)}{a}$.

$$X_Q(\tau) = \frac{sech(a\tau) - 1}{a}$$

La carte de Rindler : (CR, g)

Les CR ne sont plus orthonormées (mais orthogonales). La carte est plate : métrique $\Phi^*\eta = g = \begin{pmatrix} (1+ax)^2 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$$t_Q(\tau) = \frac{th(a\tau)}{a}$$

Ccl : l'image de la ligne d'univers de O devient la ligne d'univers de Q pour M.

$V_Q = \gamma(1, -v)$ et B_Q est une fonction de V_Q.

... et l'accélération absolue de Q est nulle

Prochain exposé : ds^2 de Schwarzschild – Relativité générale.