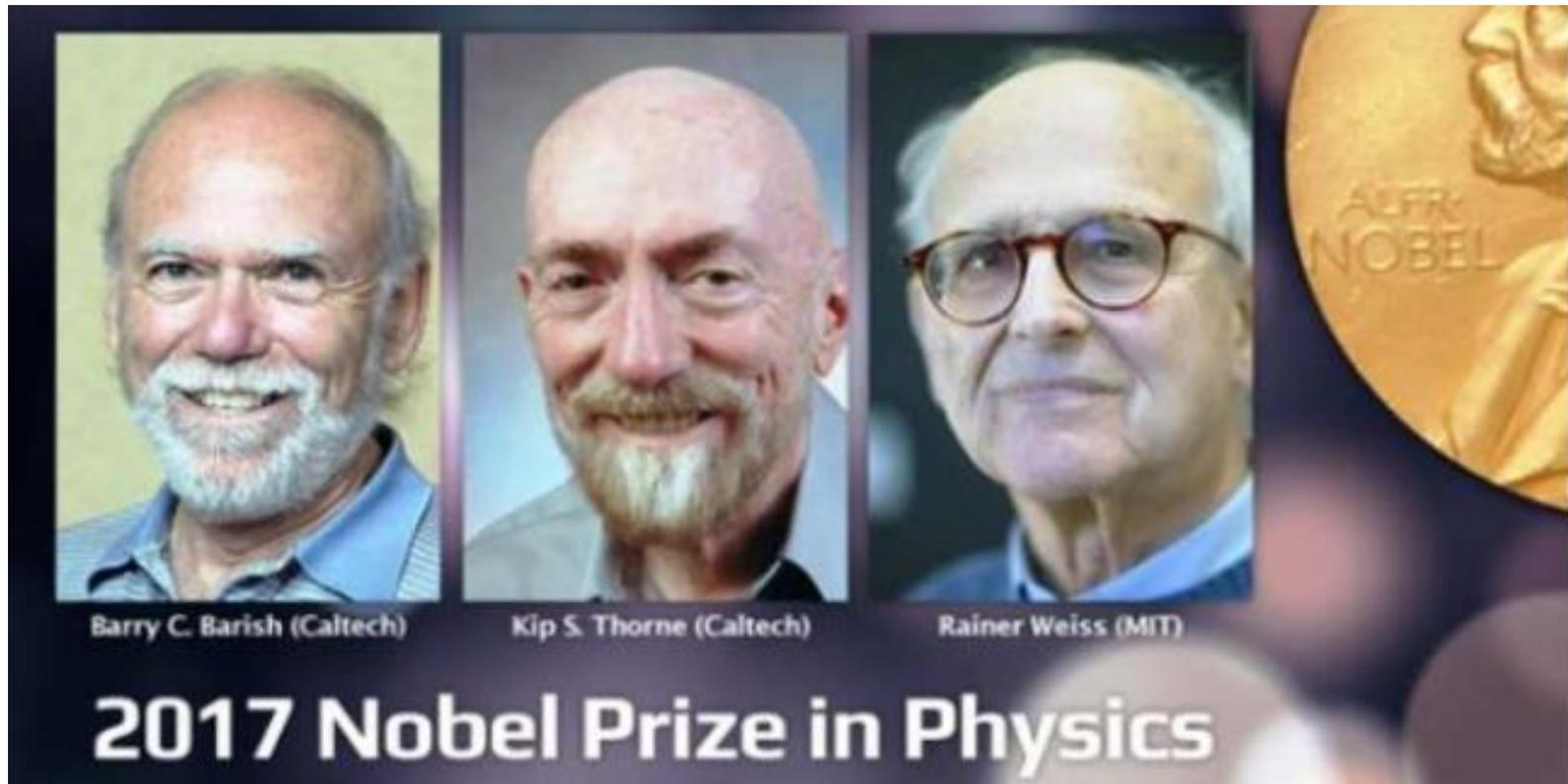


Des ondes Mécaniques aux ondes de Gravitation

Epiphymaths

Exposé de Daniel VAN LABEKE : Février 2018

Les Ondes de Gravitation (1) :
Généralités
Historique
Ordres de grandeur



Barry C. Barish (Caltech)

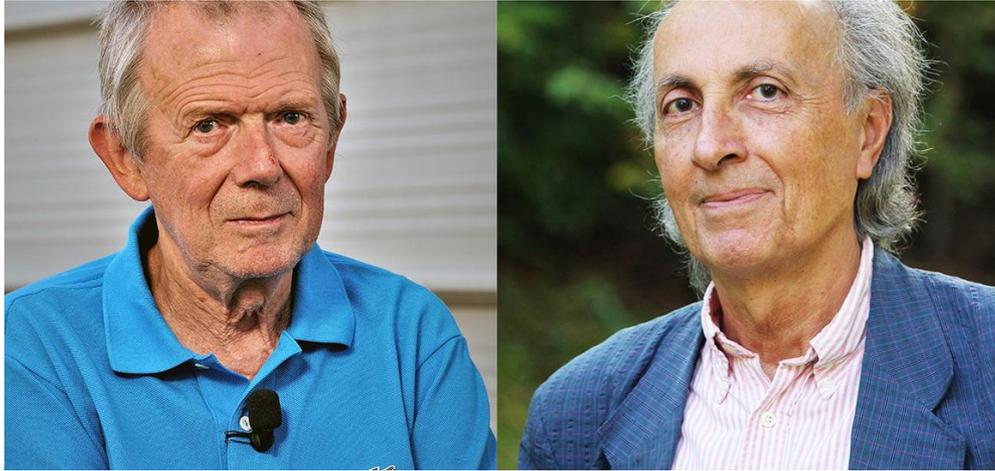
Kip S. Thorne (Caltech)

Rainer Weiss (MIT)

2017 Nobel Prize in Physics

Le prix Nobel de physique a été attribué ce mardi à trois scientifiques, Rainer Weiss, Barry C. Barish et Kip S. Thorne, « **pour leurs contributions décisives (...) à l'observation des ondes gravitationnelles** ».

Médaille d'or du CNRS 2017

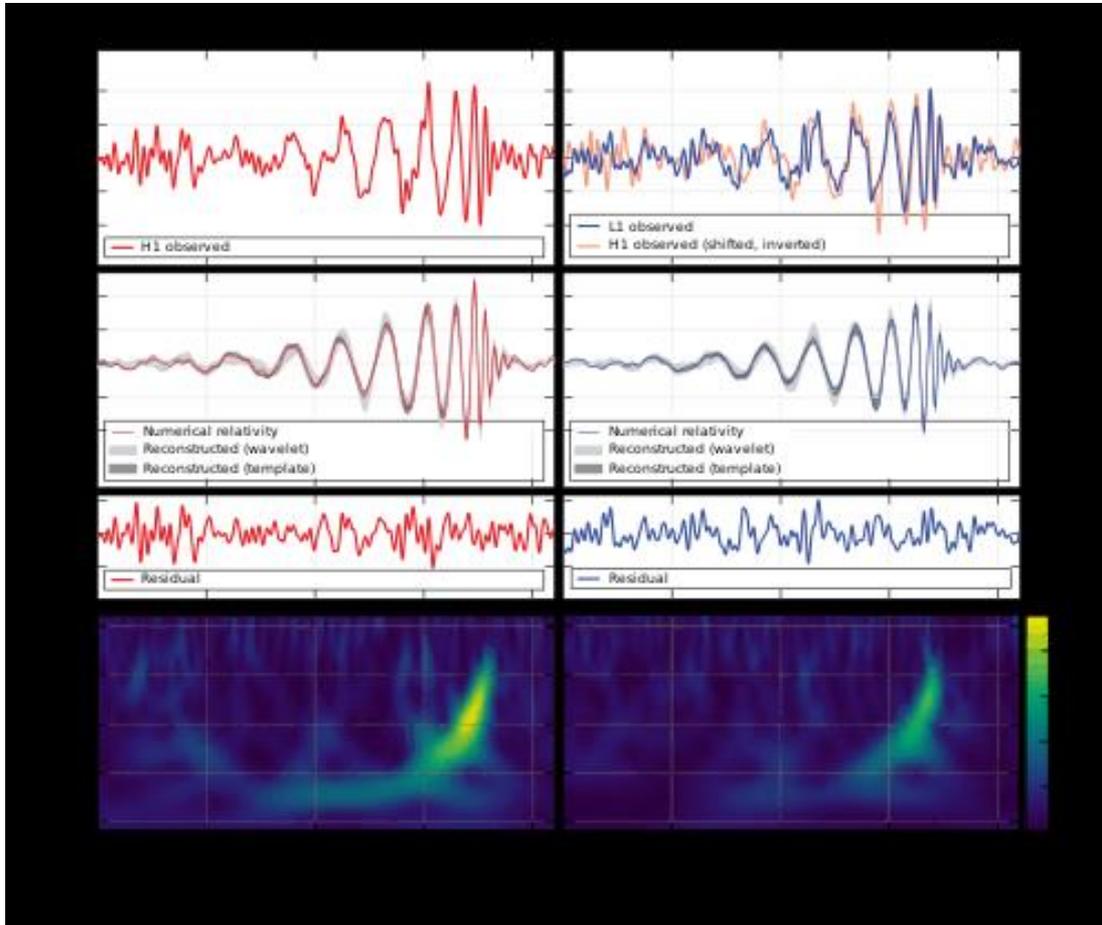


Alain Brillet et Thibault Damour, physiciens, lauréats 2017 d'une double médaille d'or du CNRS

Le CNRS attribue pour 2017 deux médailles d'or : les physiciens Alain Brillet et Thibault Damour sont récompensés pour leurs contributions majeures à la détection des ondes gravitationnelles, annoncée pour la première fois le 11 février 2016¹. Par ses travaux sur les lasers stabilisés, Alain Brillet, visionnaire dans le développement des détecteurs d'ondes gravitationnelles, est l'un des pères de l'instrument européen Virgo. Les travaux théoriques de Thibault Damour, spécialiste des trous noirs et du rayonnement gravitationnel, ont été déterminants dans l'analyse des données des détecteurs d'ondes gravitationnelles. Cette récompense décernée par le collège de direction du CNRS, plus haute distinction scientifique française, leur sera remise le 14 décembre 2017 au cours d'une cérémonie au Collège de France.

Première détection directe

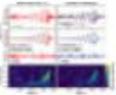
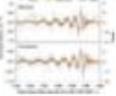
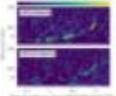
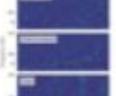
14 septembre 2015 (annoncé le 11/02/2016) : 2 observatoire LIGO



Paire de trous noirs qui fusionnent
Masses : $36(-4,+5)M_{\odot}$ et $29(-4+4)M_{\odot}$,
donnant un trou noir de $62(-4,+4)M_{\odot}$

List of binary merger events

GW event	Detection time (UTC)	Date published	Location area ^[n 1] (deg ²)	Luminosity distance (Mpc) ^[n 2]	Energy radiated (c ² M _⊙) ^[n 3]	Chirp mass (M _⊙) ^[n 4]	Primary		Secondary		Remnant			
							Type	Mass (M _⊙)	Type	Mass (M _⊙)	Type	Mass (M _⊙)	Spin ^[n 5]	
GW150914	2015-09-14 09:50:45	2016-02-11	600; mostly to the south	440 ⁺¹⁶⁰ ₋₁₈₀	3.0 ^{+0.5} _{-0.5}	28.2 ^{+1.8} _{-1.7}	<u>BH</u> ^[n 6]	35.4 ^{+5.0} _{-3.4}	<u>BH</u> ^[n 7]	29.8 ^{+3.3} _{-4.3}	BH	62.2 ^{+3.7} _{-3.4}	0.68 ^{+0.05} _{-0.06}	F n p
LVT151012	2015-10-12 09:54:43	2016-06-15	1600	1000 ⁺⁵⁰⁰ ₋₅₀₀	1.5 ^{+0.3} _{-0.4}	15.1 ^{+1.4} _{-1.1}	<u>BH</u>	23 ⁺¹⁸ ₋₆	BH	13 ⁺⁴ ₋₅	BH	35 ⁺¹⁴ ₋₄	0.66 ^{+0.09} _{-0.10}	N (
GW151226	2015-12-26 03:38:53	2016-06-15	850	440 ⁺¹⁸⁰ ₋₁₉₀	1.0 ^{+0.1} _{-0.2}	8.9 ^{+0.3} _{-0.3}	<u>BH</u>	14.2 ^{+8.3} _{-3.7}	BH	7.5 ^{+2.3} _{-2.3}	BH	20.8 ^{+6.1} _{-1.7}	0.74 ^{+0.06} _{-0.06}	
GW170104	2017-01-04 10:11:58	2017-06-01	1200	880 ⁺⁴⁵⁰ ₋₃₉₀	2.0 ^{+0.6} _{-0.7}	21.1 ^{+2.4} _{-2.7}	<u>BH</u>	31.2 ^{+8.4} _{-6.0}	BH	19.4 ^{+5.3} _{-5.9}	BH	48.7 ^{+5.7} _{-4.6}	0.64 ^{+0.09} _{-0.20}	F
GW170608	2017-06-08 02:01:16	2017-11-16	520; to the north	340 ⁺¹⁴⁰ ₋₁₄₀	0.85 ^{+0.07} _{-0.17}	7.9 ^{+0.2} _{-0.2}	<u>BH</u>	12 ⁺⁷ ₋₂	BH	7 ⁺² ₋₂	BH	18.0 ^{+4.8} _{-0.9}	0.69 ^{+0.04} _{-0.05}	S d
GW170814	2017-08-14 10:30:43	2017-09-27	60; towards Eridanus	540 ⁺¹³⁰ ₋₂₁₀	2.7 ^{+0.4} _{-0.3}	24.1 ^{+1.4} _{-1.1}	<u>BH</u>	30.5 ^{+5.7} _{-3.0}	BH	25.3 ^{+2.8} _{-4.2}	BH	53.2 ^{+3.2} _{-2.5}	0.70 ^{+0.07} _{-0.05}	F o o
GW170817	2017-08-17 12:41:04	2017-10-16	28; NGC 4993	40 ⁺⁸ ₋₁₄	> 0.025	1.188 ^{+0.004} _{-0.002}	<u>NS</u>	1.36 - 1.60 ^[n 8]	NS	1.17 - 1.36 ^[n 9]	<u>BH</u> ^[n 10]	< 2.74 ^{+0.04} _{-0.01} ^[n 11]		F fi (n

Signal	Désignation	Date de détection	Détecteurs	Date de confirmation	Phénomène
	<u>GW150914</u>	<u>14 septembre 2015</u>	<u>LIGO</u>	<u>11 février 2016</u>	Coalescence de deux trous noirs. $1,3 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) ³ : 29 + 36 → 62 + 3 .
	<u>GW151226</u>	<u>26 décembre 2015</u>	LIGO	<u>15 juin 2016</u>	Coalescence de deux trous noirs. $1,4 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 14,2 + 7,5 → 20,8 + 1 .
	<u>GW170104</u>	<u>4 janvier 2017</u>	LIGO	<u>1^{er} juin 2017</u>	Coalescence de deux trous noirs. $2,9 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 31,2 + 19,4 → 48,7 + 2 .
	<u>GW170608</u>	<u>8 juin 2017</u>	LIGO	<u>15 novembre 2017</u>	Coalescence de deux trous noirs. $0,7$ à $1,5 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 12 + 7 → 18 + 1 .
	<u>GW170814</u>	<u>14 août 2017</u>	LIGO/Virgo	<u>27 septembre 2017</u>	Coalescence de deux trous noirs. $1,8 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 25 + 31 → 53 + 3 .
	<u>GW170817</u>	<u>17 août 2017</u>	LIGO/Virgo	<u>16 octobre 2017</u>	Coalescence de deux étoiles à neutrons. $1,3 \times 10^8$ al ; Énergie (M_{\odot}) > 0,025 .

GW170817

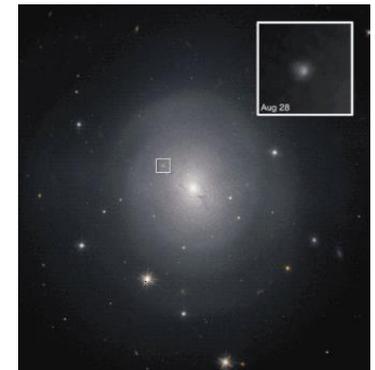
GW170817, LIGO,VIRGO, which had a duration of approximately 100 seconds, yielded an approximate angular direction to the source.

GRB 170817A, a short (~ 2 seconds long) [gamma-ray burst](#) detected by the [Fermi](#) and [INTEGRAL](#) spacecraft beginning 1.7 seconds after the GW merger signal.^{[1][13][14]} These detectors have very limited directional sensitivity, but indicated a large area of the sky which overlapped the gravitational wave position. It has long been theorized that short gamma-ray bursts are caused by neutron star mergers

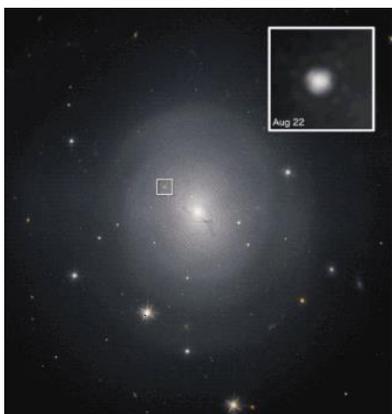
•**AT 2017gfo** (originally, **SSS17a**), an optical [astronomical transient](#) found 11 hours later in the galaxy [NGC 4993](#)^[15] during a search of the region indicated by the GW detection. This was observed by numerous telescopes, from radio to X-ray wavelengths, over the following days and weeks, and showed the characteristics (a fast-moving, rapidly-cooling cloud of neutron-rich material) expected of debris ejected from a neutron-star merger.

On 9 December 2017, astronomers reported a brightening of X-ray emissions from GW170817/[GRB 170817A](#)/[SSS17a](#).^{[16][17]}

significant breakthrough for multi-messenger astronomy.



GRB170817



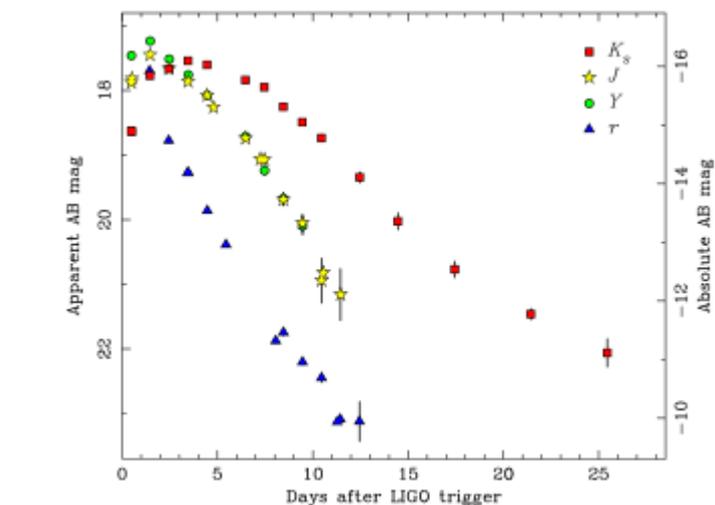
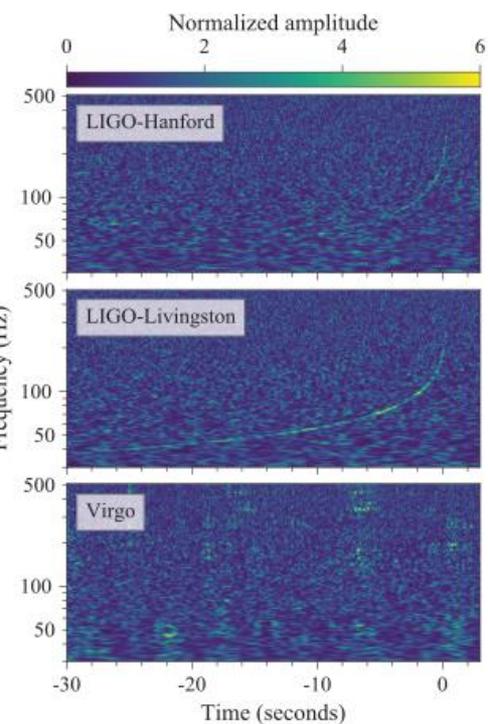
Hubble picture of NGC 4993 with inset showing GRB 170817A over 6 days.

Constellation Hydra

AD : 13h 09m 48.08s Decl $-23^{\circ} 22' 53.3''$

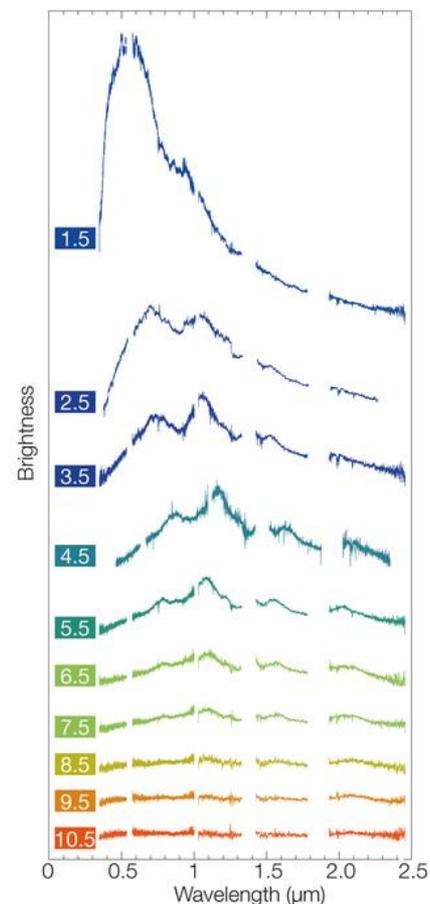
Distance (130 Mly)

Redshift 0.009



Optical light-curves

Gravitation



change in optical and near-infrared spectra

- 1) Progresser en Relativité générale
- 2) Découvrir (et savoir faire) les calculs menant aux ondes de gravitation
- 3) Comprendre comment elles ont pu être détectées
- 4) Faire le lien avec les autres ondes :
 - a) Mise en équation
 - b) Polarisation
 - c) Problème de jauge
 - d) « Origine » de la vitesse des ondes
 - e) Pourquoi les ondes de gravitation se propagent à c ?

Des ondes Mécaniques aux ondes de Gravitation

1) Généralités sur les ondes

- a) Ondes mécaniques dans un solide: Equation d'onde.
- b) Onde acoustique
- c) Ondes Electromagnétiques

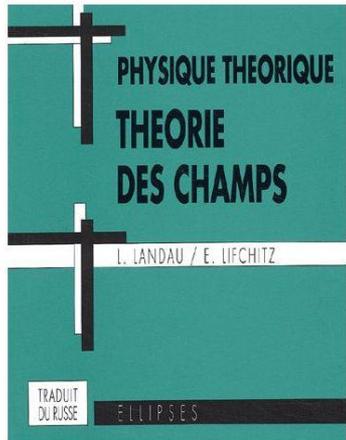
2) Ondes de Gravitation

- a) Historique de leur invention Historique des Observations
- b) Ordres de grandeur
- c) Mise en évidence indirecte et Pulsars binaires
- d) Détection mécanique
- e) Détection optique

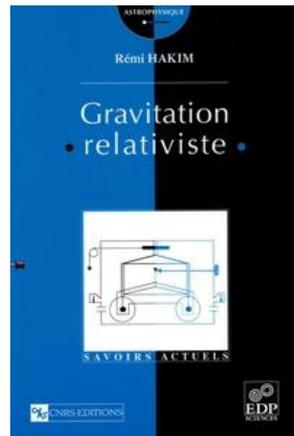
3) Théorie des ondes de gravitation

- a) Rapide rappel des principes théoriques de la Relativité Générale
- b) Equation d'Einstein
- c) Approximation linéaire et équation des ondes de gravitation
- d) Problèmes et questions à propos de l'invariance de jauge en théorie de la gravitation
- e) Polarisation des ondes de gravitation
- f) Principe des calculs de rayonnement des ondes de gravitation
- g) Paramètres physiques déterminant la vitesse des ondes de Gravitation ???

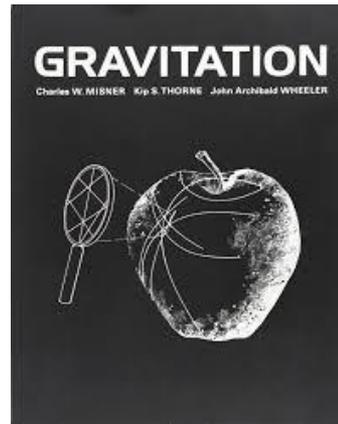
Un peu de bibliographie



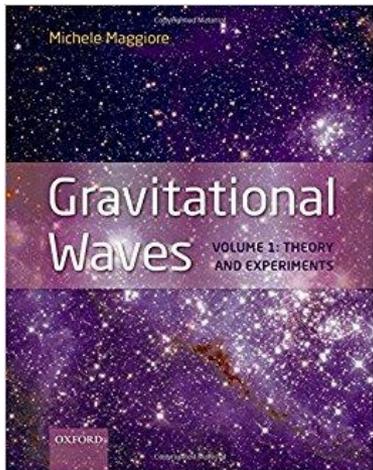
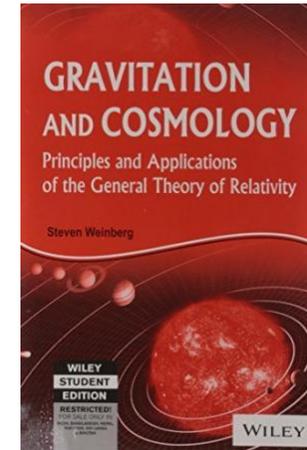
2012



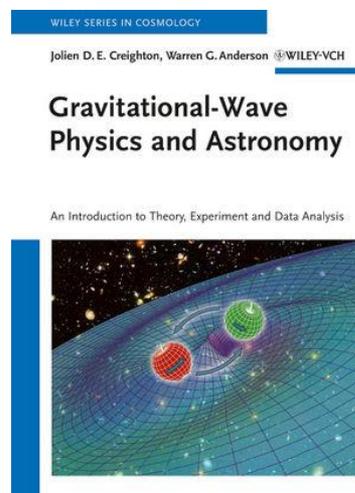
1973



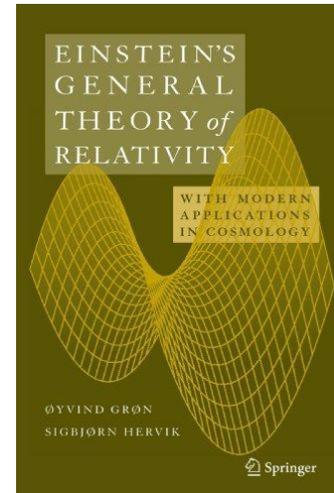
1972



2007



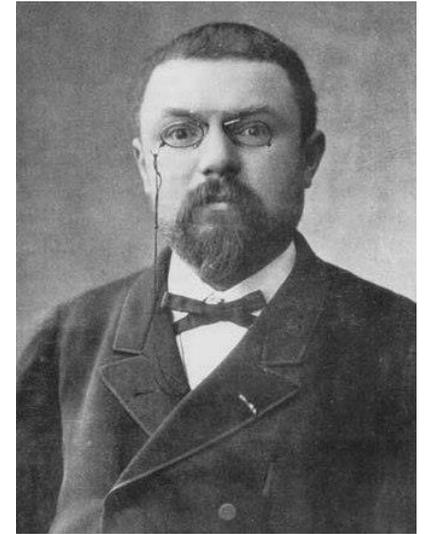
2011



2010

Henri Poincaré (1854-1912)

« **J'ai d'abord été conduit à supposer que la propagation de la gravitation n'est pas instantanée, mais se fait avec la vitesse de la lumière** [...] Quand nous parlerons donc de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s'agira de cette position ou de cette vitesse à l'instant où l'onde gravifique est partie de ce corps ; quand nous parlerons de la position ou de la vitesse du corps attiré, il s'agira de cette position ou de cette vitesse à l'instant où ce corps attiré a été atteint par l'onde gravifique émanée de l'autre corps ; il est clair que le premier instant est antérieur au second » H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 140, p. 1507 (5 juin 1905) ;



Einstein et les ondes de gravitation

Relativité

- 1907 Référentiel accéléré en relativité restreinte.
Prédiction de l'effet de la gravitation sur le temps
- 1911 Publication sur les lentilles de gravitation
- 1912 Théorie de l'espace temps et gravitation = géométrie
- 1915 Equation d'Einstein
- 1916 Publication dans *Annalen der Physik* : relativité générale

Ondes de Gravitation :

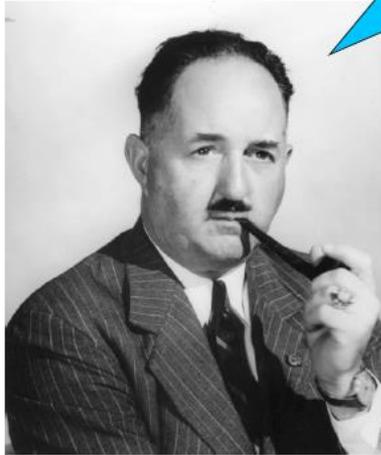
- A. Einstein, *Sb. Preuss. Akad. Wiss.* 688 (1916) ¹ These *Sitzungsber.* (1916), pp. 688 ff.
- A. Einstein, *Sb. Preuss. Akad. Wiss.* 154-167 (1918)
« *Über Gravitationswellen* » On gravitation waves »
Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). *Sitzungsberichte*

Calculs d'Einstein \approx calculs actuels

Cependant, la réalité des ondes gravitationnelles a été longuement débattue, Einstein changeant lui-même plusieurs fois d'avis à ce sujet.

Ondes réelles ou « pur effet de jauge »

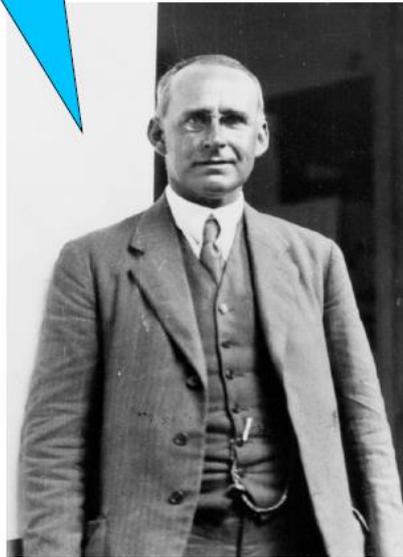
Hésitations d'Einstein



Howard P. Robertson

They do Exist

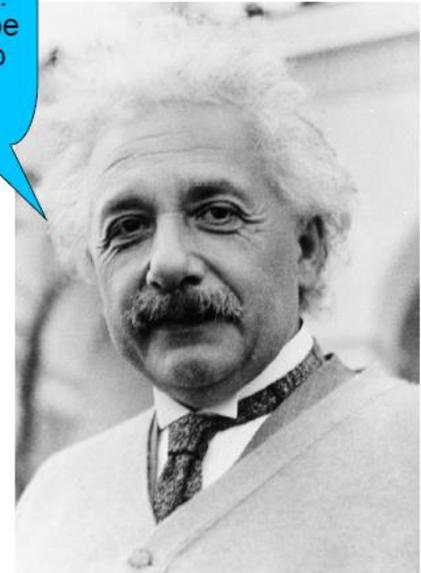
I'm skeptical



Arthur S. Eddington

They don't ...
They do!

No, wait,
they don't ...
or maybe they do



Albert Einstein

Vers l'observation et la détection des ondes de gravitation

La question fut définitivement tranchée lors de la conférence de Chapel Hill (Caroline du Nord) (États-Unis) en 1957. Les contributions de Felix Pirani et Hermann Bondi furent déterminantes.

1) Détection par résonance de cylindre métallique :

Barres de J. Weber 1967

1 détection en 1968 sur 2 barres distantes de 1 km : pas de répétabilité

2) Observation indirecte par mesures sur un **pulsar binaire**

PSR B1913+168 permit aux physiciens Russell Hulse et Joseph Taylor de, en montrant que la diminution de période de ce système binaire s'expliquait avec précision par l'émission de telles ondes. Ce travail fut récompensé par le prix Nobel de physique en 1993

Ondes Electromagnétiques-Ondes Gravitationnelles

- Ondes Radio
- Infra-Rouge
- Visible
- Ultra-Violet
- Rayons X
- Rayons g

Ondes électromagnétiques

émises par des charges électriques accélérées

Charges libres

Charges d'atomes ou de molécules

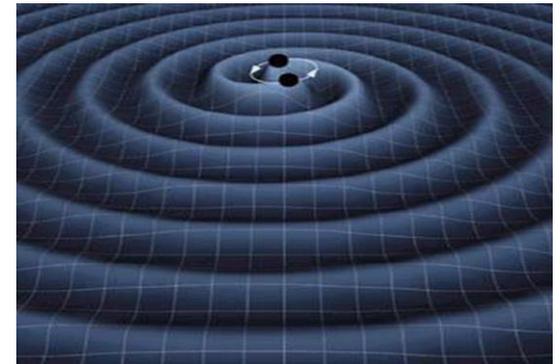
Charges de noyaux (réactions nucléaires)

Ondes Gravitationnelles

émises par des masses accélérées

Ondes de gravitation : généralités

- L'existence des ondes gravitationnelles furent prédites par la Relativité Générale d'Einstein
- Ce sont des perturbations de l'espace-temps (de l'espace)
(analogues aux vagues de la mer)
- Elles voyagent à la vitesse de la lumière
- Elles peuvent traverser des millions d'années-lumière sans être absorbées par la matière
- Les Propriétés et les intensités d'émission et de détection sont prédites par la Relativité Générale

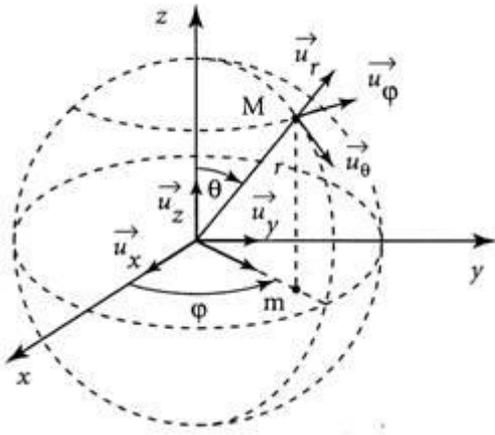


Tenseur Métrique

Espace Euclidien 3D, coordonnées cartésiennes

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Espace Euclidien 3D, coordonnées Sphériques



$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Invariant par rotation

Espace Euclidien 3D, coordonnées curvilignes

$$dl^2 = \sum_{i,j=1,2,3} g_{i,j} du_i du_j$$

Tenseur Métrique Espace temps

Espace-Temps de Minkowski
(Relativité Restreinte)
Espace-temps plat

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Invariant par transformation de Lorentz

Espace-Temps en Relativité générale
(Gravitation)

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0,1,2,3} g_{\alpha,\beta} du_{\alpha} du_{\beta}$$

$$[g_{\alpha,\beta}(u_{\alpha})]$$

Tenseur métrique :
« forme » locale = géométrie locale
de l'espace temps=gravitation
Espace-temps avec courbure



Covariance généralisée : tous les systèmes de coordonnées sont utilisables

Dimension des g_{ij}

Longueur au carré

Longueur

Longueur

$$ds^2 = \sum_{i,j=0,1,2,3} g_{i,j} du_i du_j$$

$g_{i,j}$ est sans dimension

Exemple : Minkowski

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

$$[g] = \text{Diag}[-1, 1, 1, 1] = [\eta_{i,j}]$$

sans dimension

Remarque :

$ds = \text{longueur}$

$ds = c d\tau$ avec τ temps propre

En général les effets de la relativité générale sont très très faibles.

$$[g_{\alpha\beta}] \approx [\eta_{\alpha\beta}] = \text{Diag}[-1, 1, 1, 1]$$

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

Les effets statiques de Relativité Générale sont en général très (très) petits

Les effets dynamiques sont encore plus faibles :

Rotation de l'astre

Ondes de gravitation

Equation d'onde : champ faible et source lente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu},$$

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h.$$

$$\square = -(1/c^2)\partial_0^2 + \nabla^2$$

Calculs avec jauge particulière

$$[h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x})]_{\text{quad}} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}_{ij}^{\text{TT}}(t - r/c)$$

$$\begin{aligned} Q^{ij} &\equiv M^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} M_{kk} \\ &= \int d^3x \rho(t, \mathbf{x}) (x^i x^j - \frac{1}{3}r^2 \delta^{ij}), \end{aligned}$$

Dimension de G

Formule de Newton (force de gravitation entre 2 masses) : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

Dimension d'une force : $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ $[F] = [M][L][T]^{-2}$

Dimension de la constante de Gravitation :

$$[G] = [F][L]^2 [M]^{-2} = [L]^3 [M]^{-1} [T]^{-2}$$

$$G = 6,674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Dimension de $\frac{GM}{c^2}$ $\frac{[L]^3 [T]^{-2}}{[L]^2 [T]^{-2}} = [L]$

Comparaison force de gravitation-force électrostatique

Loi de Newton

« Principes Mathématiques
de la Philosophie Naturelle » (1687)

Entre 2 masses

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{\vec{F}_G}{\vec{F}_E} = -\frac{G}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_1 m_2}{q_1 q_2}$$

Loi de Coulomb 1785

Entre 2 charges

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Entre 2 électrons

$$G = 6.6740810^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ kg m A}^{-2} \text{ s}^{-2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.85418782 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$$

$$m_1 = m_2 = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$q_1 = q_2 = -1,602\ 176\ 565(35) \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\frac{\vec{F}_G}{\vec{F}_E} = -1.93899 \times 10^{-23} \text{ !!!!!!! } \text{????}$$

Exemple : Métrique de Schwarzschild

Astre immobile, sans rotation sans charge, masse totale M
 g_{ij} à l'extérieur

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Coordonnées : t + « sphériques » r, θ, ϕ

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 - c^2 dt^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)$$

$$h_{0,0} = + \frac{R_s}{r}$$

$$h_{r,r} = + \frac{2R_s}{r}$$

	Rayon	Masse	Rs
Soleil	696 000 km	$2 \cdot 10^{30}$ kg	2,85 km
Terre	6300 km	$6 \cdot 10^{24}$ kg	8,9 mm
Electron		$9 \cdot 10^{-31}$ kg	$12 \cdot 10^{-58}$ m

La métrique est celle de Minkowski sauf près du Rayon de Schwarzschild
Les corrections de relativité générale sont très très faibles.

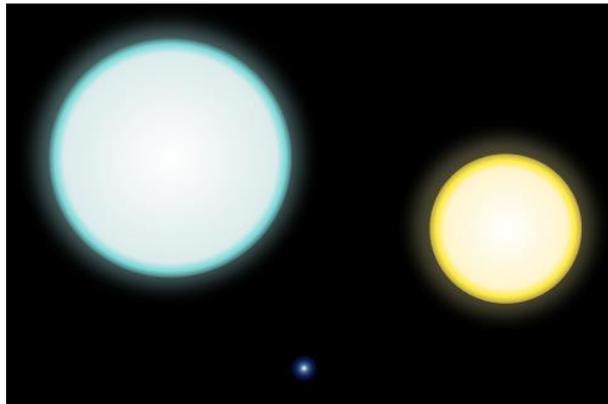
Correction à la métrique

$$h_{0,0} = + \frac{R_S}{r} \quad h_{r,r} = + \frac{2R_S}{r}$$



A la surface de la terre

$$h_{0,0} = 1.4 \cdot 10^{-10}$$



A la surface du Soleil

$$h_{0,0} = 4 \cdot 10^{-6}$$

A la surface d'une naine blanche (Masse = masse du soleil, Rayon = Rayon Soleil/100) $h_{0,0} = 10^{-4}$

Objet	GM/Rc^2
Noyau atomique	10^{-38}
Atome	10^{-43}
Homme	10^{-25}
Terre	10^{-9}
Soleil	10^{-6}
Galaxie	10^{-7}
Naines blanches	10^{-4}
Étoile à neutrons	10^{-1}
Univers	10^0
Trou noir	1

$$h_{0,0} \approx 10^{-1}$$

A la surface d'une Etoile à Neutrons
Masse = 1,4-3,2
Masse du soleil
Rayon = 10-15 km !!!

Rayonnement de sources

Acoustique : onde scalaire (p) ou longitudinale (vitesse)
source sphérique oscillant radialement émet du son
Source monopolaire existe en acoustique

Electromagnétisme :

Charge totale : charge sphérique oscillante ne rayonne pas
grandeurs vectorielles : \vec{E} et \vec{B}
ou onde = tenseur antisymétrique

Ou photon a un spin 1

Le rayonnement électromagnétique monopolaire n'existe pas.
Le rayonnement dipolaire est le premier (sauf si dipôle =0)

Gravitation :

La grandeur ondulatoire est le $g_{i,j}$ = tenseur symétrique ordre 2
Le rayonnement de gravitation monopolaire n'existe pas.
Le rayonnement dipolaire de gravitation n'existe pas
Le premier terme de rayonnement est quadrupolaire
ou Le graviton a un spin égal à 2

Emission par rotation d'une masse (Creighton 3.4)

$$I^{ij} = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) (r^2 \delta^{ij} - x^i x^j).$$

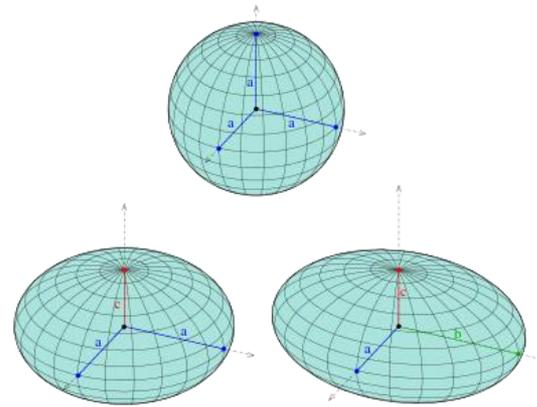
Moments Principaux d'inertie

$$I_1 = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') (x_2'^2 + x_3'^2),$$

$$I_2 = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') (x_1'^2 + x_3'^2),$$

$$I_3 = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') (x_1'^2 + x_2'^2).$$

$$I = I_1 + I_2 \text{ and } \varepsilon = (I_1 - I_2)/I_3$$



$$I_1 = \frac{m}{5} (b^2 + c^2),$$

$$I_2 = \frac{m}{5} (a^2 + c^2),$$

$$I_3 = \frac{m}{5} (a^2 + b^2).$$

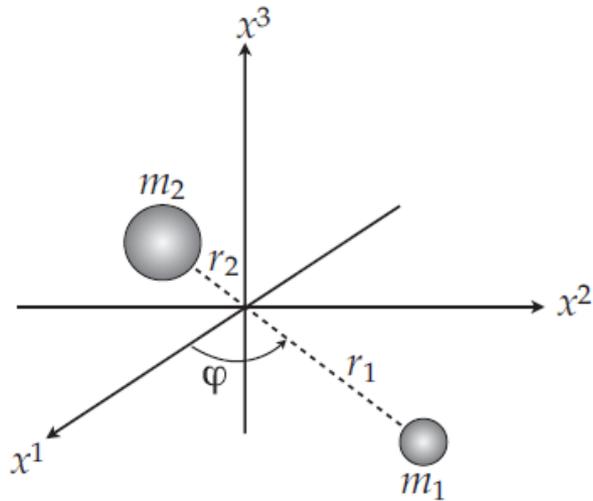
Rotation autour de l'axe principal Z

$$h_+ = -\frac{4G\varepsilon I_3 \omega^2}{c^4 r} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos 2\omega t$$

$$h_\times = \frac{4G\varepsilon I_3 \omega^2}{c^4 r} \cos \iota \sin 2\omega t.$$

$$L_{\text{GW}} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{\mathbb{F}}_{ij} \ddot{\mathbb{F}}^{ij} \rangle = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \varepsilon^2 I_3^2 \omega^6.$$

Deux masses en orbites circulaires (Creighton 3.5)



$$a = r_1 + r_2 \quad M = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

$$GM = a^3 \omega^2 \quad \mathbf{v} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{11}^2 + \ddot{I}_{22}^2 + 2\ddot{I}_{12}^2 \rangle = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \eta^2 \left(\frac{v}{c}\right)^{10},$$

$$h_+ = -\frac{2G\mu}{rc^2} [1 + \cos^2(\theta)] \left[\frac{v}{c}\right]^2 \cos(2\omega t)$$

$$h_x = -\frac{4G\mu}{rc^2} \cos(\theta) \left[\frac{v}{c}\right]^2 \sin(2\omega t)$$

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{\mu}{M}\right) \left(\frac{v}{c}\right)^{10}$$

Deux masses en orbites elliptiques (Creighton 3.9)

Problem 3.9

Consider a binary system with total mass M and reduced mass μ in an eccentric Keplerian orbit with semi-major axis a and orbital eccentricity e .

- a) Show, for an observer located at a great distance r on the orbital angular momentum axis, that

$$h_+ = -\frac{G\mu}{c^2 r} \frac{GM}{c^2 a(1-e^2)} (4 \cos 2\varphi + 5e \cos \varphi + e \cos 3\varphi)$$
$$h_\times = -\frac{G\mu}{c^2 r} \frac{GM}{c^2 a(1-e^2)} (4 \sin 2\varphi + 5e \sin \varphi + e \sin 3\varphi).$$

- b) Show that the orbital energy and angular momentum radiated per unit time are

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e) \quad \text{and} \quad -\frac{dL}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^{7/2} \mu^2 M^{5/2}}{c^5 a^{7/2}} g(e),$$

where

$$f(e) = \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1-e^2)^{7/2}} \quad \text{and} \quad g(e) = \frac{1 + \frac{7}{8}e^2}{(1-e^2)^2}.$$

- c) Compute da/dt and de/dt and show that the elliptical orbit is circularized by gravitational-wave emission.

Deux masses en orbites elliptiques (Schutz RG p255)

49 For the arbitrary binary system of Exer. 39:

(a) Show that the average energy loss rate over one orbit is

$$\langle dE/dt \rangle = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^3}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (9.166)$$

and from the result of Exer. 47(a)

$$\langle dL/dt \rangle = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^{5/2}}{a^{7/2} (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right), \quad (9.167)$$

where $\mu = mM/(m+M)$ is the reduced mass.

(b) Show that

$$\langle da/dt \rangle = -\frac{64}{5} \frac{\mu (m+M)^2}{a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (9.168)$$

$$\langle de/dt \rangle = -\frac{304}{15} \frac{\mu (m+M)^2 e}{a^4 (1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right), \quad (9.169)$$

$$\langle dP/dt \rangle = -\frac{192\pi}{5} \frac{\mu (m+M)^{3/2}}{a^{5/2} (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (9.170)$$

(c) Verify Eq. (9.144).

(Do parts (b) and (c) even if you can't do (a).) These were originally derived by Peters (1964).

Source « expérimentale » d'ondes de gravitation ?

Expérience de Hertz en gravitation

Fomule du Quadrupole :

$$P = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{Q}_{\mu\nu} \ddot{Q}^{\mu\nu} \right\rangle$$

Moment Quadrupolaire : quantifie l'écart à la symétrie sphérique

$G/5c^5 \sim 10^{-53} \text{ W}^{-1}$

source	distance	h	P (W)
Barre d'acier, 500 T, $\varnothing = 2$ m L = 20 m, 5 tours/s	1 m	2×10^{-34}	10^{-29}
Bombe H 1 mégatonne Asymétrie 10%	10 km	2×10^{-39}	10^{-11}

Signaux indétectés et indétectables ?

ε asymétrie de la source

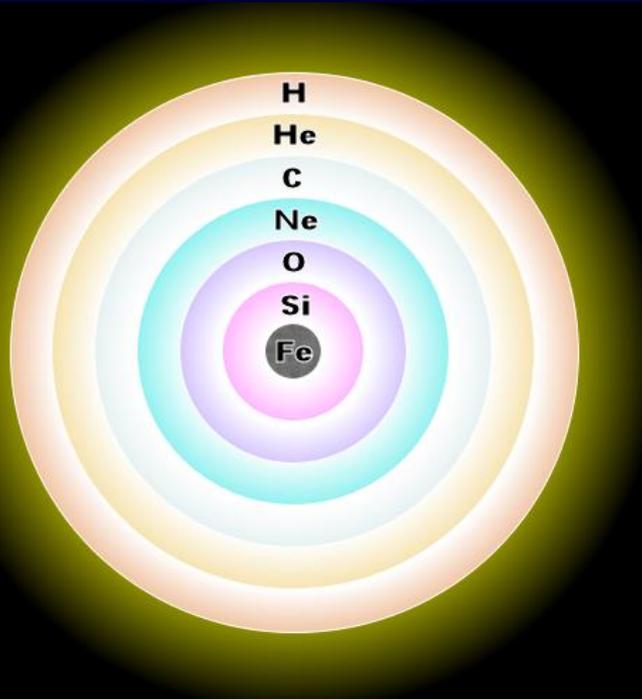
$$P = \frac{5c^5}{G} \varepsilon^2 \frac{R_s^2}{R^2} \frac{v^6}{c^6}$$

- R_s rayon de Schwarzschild de la source
- R rayon de la source
- v vitesse typique de la source

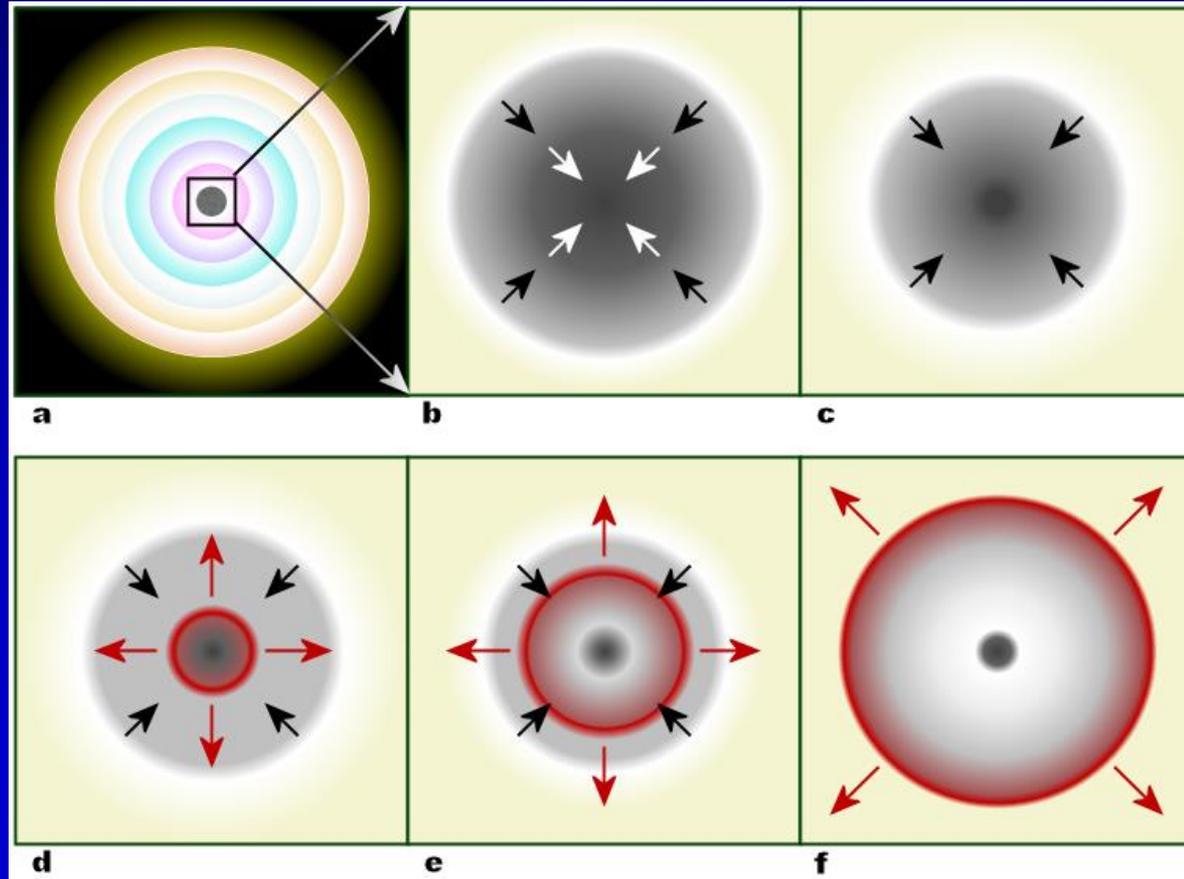
source	distance	h	P (W)
Supernova $10 M_\odot$ asymétrie 3%	10 Mpc	10^{-21}	10^{44}
Coalescence de 2 trous noirs de $1 M_\odot$	10 Mpc	10^{-20}	10^{50}

⇒ Seuls les phénomènes astrophysiques cataclysmiques peuvent émettre des ondes gravitationnelles détectables

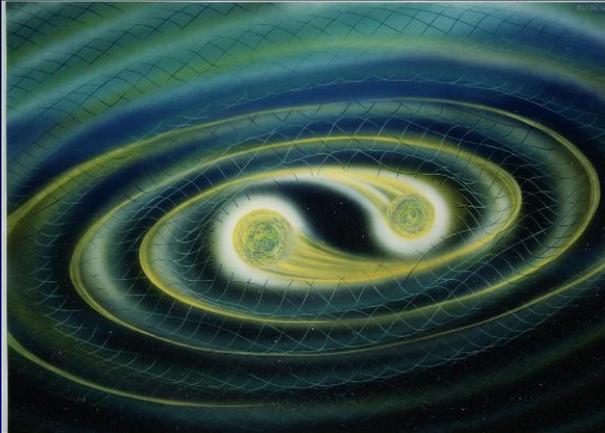
Les Supernovae gravitationnelles



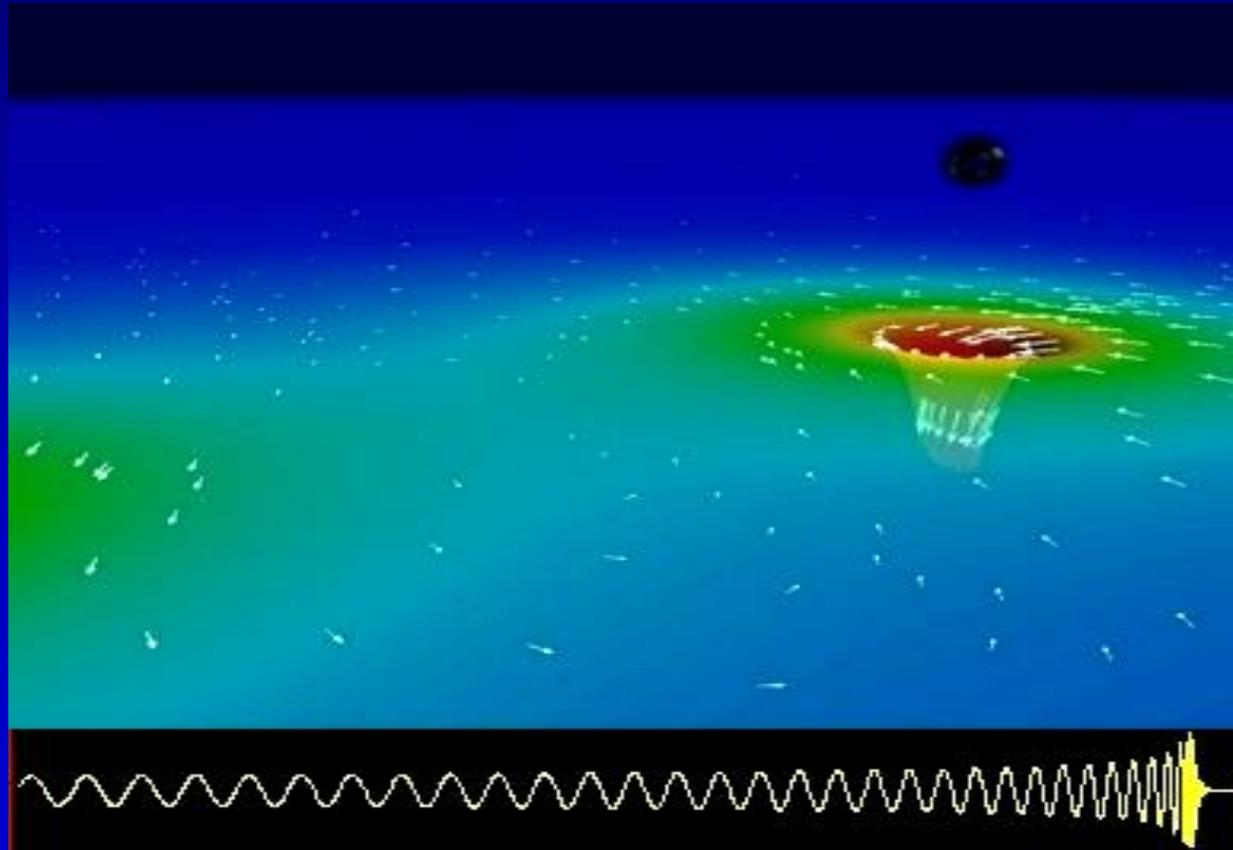
- Étoile massive en fin de vie
- Cœur de fer qui ne peut plus compenser son poids
- Effondrement rapide pour former une étoile à neutron



Coalescence d'étoiles à neutrons



Coalescence de trous noirs et désexcitation d'un trou noir



Spectre des Ondes de Gravitation

