Cours Logique **Première**

1. **<u>Rappels</u> :**

   1. **Proposition**

Définition : une proposition logique est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

<u>Exemples</u> :
La proposition A : « 2 est un nombre pair » est une proposition vraie.
La proposition B : « $2 \times 3 = 7$ » est une proposition fausse.
Le théorème de Pythagore est une proposition vraie. (si revu en classe)

   2. **Implication**

Définition : une implication est une proposition de la forme :« si A alors B »

Notation : « si A alors B » peut se noter « $A \Rightarrow B$ », ce qui se lit : « A implique B ».

Une implication peut être vraie ou fausse.

<u>Exemple 1</u> :
« Si I est le milieu du segment [EF] alors les points E, I et F sont alignés »   est une implication vraie.

<u>Exemple 2</u> :
« Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ » est une implication vraie.
« Si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ » est une implication fausse, en effet $(-2)^2 = 4$ et $-2 \neq 2$.

   3. **Réciproque d'une implication**

Définition : la réciproque de « si A alors B » est : « si B alors A »

Une implication et sa réciproque peuvent être vraies ou fausses indépendamment l'une de l'autre.

<u>Exemple 1</u> :
L'implication « s'il pleut alors il y a des nuages » est vraie.
Sa réciproque : « s'il y a des nuages alors il pleut » est fausse.

<u>Exemple 2</u> :
Soit P : « ABC est un triangle rectangle en A » et Q : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$»
« P implique Q » est une proposition vraie.
« Q implique P » est une proposition vraie.

4. Équivalence

Soit n un entier naturel, l'implication suivante

« si n est un multiple de 10 alors n se termine par 0 »est vraie .

Énoncer la réciproque de cette implication.

Est-elle vraie ?

On peut alors écrire « n est un multiple de 10 équivaut à n se termine par 0. »

Définition : Lorsque les deux implications « P $\Rightarrow$Q » et « Q $\Rightarrow$P » sont vraies, on dit que « P est équivalent à Q » .

On peut dire également : « P équivaut à Q» ou « P si et seulement si Q ».

Notation : « P est équivalent à Q » peut se noter « P $\Leftrightarrow$Q ».

Exemple :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

5. Contraposée d'une implication

Définition : la contraposée de « si A alors B » est « si non B alors non A ».

Une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Une implication est équivalente à sa contraposée.

Exemple 1 :

L'implication « s'il pleut alors il y a des nuages » est vraie.

Sa contraposée: « s'il n'y a pas de nuages alors il ne pleut pas» est vraie.

Exemple 2 :

Soit n un entier naturel.

La contraposée de l'implication « si n^2 est pair alors n est pair » est :

« si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair ».

2. Quantificateurs « pour tout… », « il existe … »

Exemple :

x désignant un nombre réel, l'énoncé « $x > 3$ » n'est pas une proposition, on ne peut pas dire si l'énoncé est vrai ou faux. À partir de cet énoncé, on peut écrire les deux propositions suivantes :

P_1 : « Pour tout nombre réel x, $x > 3$ », cette proposition est fausse.

P_2 : « Il existe un nombre réel x tel que $x > 3$ », cette proposition est vraie.

Définitions :

- Les expressions « **Pour tout** » et « **Quel que soit** » sont appelées **quantificateurs universels.**

- L'expression « **Il existe** » est appelé **quantificateur existentiel**.

« Il existe un » signifie « Il existe au moins un ».

Exemples :

P_3 : « Pour tout nombre réel x tel que $x \geq 1,$ on a $x^3 \geq x^2$ ».

Cette proposition utilise un quantificateur universel.

P_4: « Il existe un nombre entier à la fois pair et multiple de 3 ».

Cette proposition utilise un quantificateur existentiel.

Des outils pour démontrer :

- Pour montrer qu'**une proposition universelle** est vraie, il est nécessaire de montrer qu'elle est vraie dans tous les cas (un exemple ne suffit pas !).
  Pour montrer qu'elle est fausse, il suffit de trouver un cas où elle est mise en défaut. On parle de contre-exemple.

Exemples :

- La proposition « Pour tout nombre réel $x > 0, \frac{1}{x} \leq x$ » est fausse.

En effet : pour $x = 0,5$, $\frac{1}{x} = 2$ donc $\frac{1}{x} > x$.

- La proposition « Pour tout nombre réel x, $(e^x - 1)\frac{(e^x+1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$ » est vraie.

En effet : pour tout nombre réel x, $(e^x - 1)\frac{(e^x+1)}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$

- Pour montrer qu'**une proposition existentielle** est vraie, il suffit de trouver un exemple.
  En revanche pour montrer qu'elle est fausse, il faut montrer qu'elle n'est jamais vraie.

Exemple :

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 16$.

- La proposition « Il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_n > 10\,000$ » est vraie.

En effet : pour $n = 101$, $n^2 - 16 = 10\,185$ et $10\,185 > 10\,000$.

- La proposition « Il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_n \leq -20$ » est fausse.

En effet : pour tout entier naturel n, $n^2 \geq 0$

Donc $n^2 - 16 \geq -16 > -20$

On a alors pour tout entier naturel n, $u_n > -20$

3. Négation d'une proposition

- **Rappels** :

Définition : la négation d'une proposition est la proposition obtenue en affirmant son contraire.

Notation : la négation d'une proposition **A** est la proposition notée **non A**.

Exemples :
La négation de la proposition « 2 est un nombre pair » est la proposition « 2 n'est pas un nombre pair ».
La négation de la proposition « $2 < 3$ » est la proposition « $2 \geq 3$ ».

- **Exemples de négation d'une proposition contenant les connecteurs « et » et « ou » :**

Exemple : La négation de la proposition « L'élève est brun et a les yeux bleus » est la proposition « L'élève n'est pas brun ou n'a pas les yeux bleus. »

Propriété :
(1) La négation de la proposition (P et Q) est (NonP ou NonQ).
(2) La négation de la proposition ((P ou Q) est (NonP et NonQ).

- **Exemples de négation d'une proposition contenant des quantificateurs** :

Exemple :
On considère la proposition « Pour tout réel $x, x^2 \geq 0$ »
Sa négation est : « Il existe un réel x tel que $x^2 < 0$ »

Propriété :
Quand on écrit la négation d'une proposition comportant des quantificateurs, on remplace un quantificateur existentiel par un quantificateur universel et inversement.

Exemples :
1) On considère la proposition « Il existe un entier n tel que $n^2 = 3$ »
   Sa négation est : « Pour tout entier $n, n^2 \neq 3$ »
2) Ecrire la négation de « Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n$ est strictement positif. »
3) « Toutes les personnes de la salle portent des lunettes ». Cette proposition est-elle vraie ? Enoncer la négation de cette proposition puis indiquer si la négation est vraie.
4) Ecrire la négation de « Il existe un entier naturel n tel que $u_n > 10\,000$ ».