**Exercices Première**

**Exercice 1 :**

1. Indiquer en justifiant, si la proposition suivante est vraie ou fausse :

« Soit $P$ et $Q$ deux polynômes du second degré. Si $P$ et $Q$ ont les mêmes racines, alors $P=Q.$ »

1. Ecrire la proposition réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.

**Exercice 2 :**

1. Soit une équation du second degré (E) de la forme $ax^{2}+bx+c=0.$

Montrer que, si $a$ et $c$ sont de signes contraires alors l’équation (E) a deux solutions.

1. Enoncer la réciproque de la proposition précédente. Est-elle vraie ?
2. La condition « $a$ et $c$ sont de signes contraires » est-elle une condition suffisante ou une condition nécessaire pour que l’équation (E) ait deux solutions ?

**Exercice 3 :**

Montrer l’équivalence suivante :

« Soit $s$ et $p$ deux réels.

$x$ et $y$ sont deux réels différents qui vérifient le système $\left\{\begin{array}{c}x+y=s\\xy=p\end{array}\right.$ $⟺$ $x$ et $y$ sont deux solutions distinctes de l’équation $X^{2}-sX+p=0$ .»

**Exercice 4 :** Soit$\left(u\_{n}\right)$ une suite définie sur $N$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ?

« Une suite dont les trois premiers termes sont strictement positifs est une suite strictement positive. »

1. Ecrire la proposition réciproque de la proposition précédente et dire si elle est vraie ou fausse.

**Exercice 5 :** Soit$\left(u\_{n}\right)$ une suite définie sur $N$.

Soit les propositions P1 : « La suite $\left(u\_{n}\right)$ est arithmétique » et P2 : « $u\_{1}-u\_{0}=u\_{2}-u\_{1}$ ».

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1. La proposition P1 implique la proposition P2.
2. La proposition P2 implique la proposition P1.
3. Les deux propositions sont équivalentes.

**Exercice 6 :** Une expérience aléatoire est représentée par l’arbre pondéré suivant.



On considère la proposition suivante : « Si $p=0,5$ alors P(B)$=0,45.$ »

1. Démontrer que cette proposition est vraie.
2. Enoncer la proposition réciproque. Cette proposition réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 7 :**

X est une variable aléatoire qui prend les valeurs $-1;0;1;2;3.$

1. Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
	1. Si l’évènement $\left\{X\leq 0\right\}$ est réalisé alors l’évènement $\left\{X\leq -1\right\}$ est réalisé.
	2. Si l’évènement $\left\{X>2\right\}$ est réalisé alors l’évènement $\left\{X=3\right\}$ est réalisé.
2. Rédiger la réciproque de chacune des implications ci-dessus et dire si elle est vraie ou fausse.

**Exercice 8 :**

$f$et $g$ sont deux fonctions définies sur un intervalle I et $a\in I$.

A-t-on équivalence entre les deux propositions suivantes ?

* $f $et $g$ sont dérivables en $a.$
* $f+g$ est dérivable en $a.$

**Exercice** **9 :**

On considère une fonction *f* définie sur $R$ telle que $f\left(1\right)=3 et f\left(3\right)=12$.

La proposition « *f* est croissante sur $[1;3] $» est-elle vraie ?

**Exercice** **10** **:**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout réel $x, x^{2}\geq x$.
2. Pour tout entier naturel $n, n^{2}\geq n$.

**Exercice 11 :** Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes définies sur $R$.

$f\left(x\right)= -7x^{2}$ $g\left(x\right)=4x^{3}$ $h\left(x\right)=5-3\left|x\right|$ $k\left(x\right)=x^{2}+5x-4$

**Exercice** **12 :**

$f$et $g$ sont deux fonctions dérivables sur $R$.

Dire si l’implication ci-dessous est vraie ou fausse, énoncer la réciproque et dire si cette réciproque est vraie ou fausse.

« Si pour tout nombre réel $x, f\left(x\right)-g\left(x\right)=1,$ alors les fonctions $f$et $g$ ont la même fonction dérivée. »

**Exercice** **13 :**

$f$et $g$ sont deux fonctions définies sur un intervalle I.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Si$ f$ est strictement croissante sur l’intervalle I et si pour tout réel $x$ de I, $f\left(x\right)<g(x)$, alors $g$ est strictement croissante sur I ».

**Exercice 14 :** La suite $\left(u\_{n}\right)$ est définie, pour tout entier naturel *n*, par : $\left\{\begin{matrix}u\_{0}=\frac{1}{2}\\u\_{n+1}=\frac{u\_{n}}{1+2u\_{n}}\end{matrix}\right.$.

 On admet que, pour tout entier naturel *n*, $u\_{n}>0$.

1. La suite $\left(u\_{n}\right)$ est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
2. La suite $\left(v\_{n}\right)$ est définie, pour tout entier naturel *n*, par : $v\_{n}=\frac{1}{u\_{n}}+1$. Calculer les premiers termes

de la suite $\left(v\_{n}\right)$. Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ? Démontrer-le.

1. Exprimer $v\_{n}$ puis $u\_{n}$ en fonction de *n*.

**Exercice** **15 :**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*(justifier !)*

* Il existe un réel $x$ tel que $\left(x-1\right)^{2}=x^{2}-1$ .
* Pour tout réel $x,$ on a $\left(x+1\right)^{2}=x^{2}+1$ .

**Exercice 16 :**

Dans chaque cas, compléter lorsque c’est possible la proposition par : « Pour tout(s) …, on a … » ou par « Il existe un (des) …tel que … ».

1. … événement A de probabilité non nulle…$P\_{A}\left(A\right)=1$.
2. Soit $A$ un évènement. … événement C …$ P\left(A\right)+P(C)=1$.
3. Soit $B$ un évènement. … événement A …$P \left(A\right)+P\left(B\right)>P\left(A∪B\right)$.
4. Soit $B$ un évènement. … événement A …$ P\left(A∩B\right)>P\left(A\right)$.
5. … événements A et B de probabilités non nulles…$P\_{A}\left(B\right)×P(A)=P\_{B}\left(A\right)×P(B)$.

**Exercice** **17 :**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*(justifier !)*

* Il existe des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $‖\vec{u}‖^{2}+‖\vec{v}‖^{2}-2\vec{u}.\vec{v}<0$.
* Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $‖\vec{u}+\vec{v}‖^{2}+‖\vec{u}-\vec{v}‖^{2}=2(‖\vec{u}‖^{2}+‖\vec{v}‖^{2})$.
* Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $‖\vec{u}+\vec{v}‖^{2}-‖\vec{u}-\vec{v}‖^{2}=2\vec{u}.\vec{v}$.
* Il existe un vecteur $\vec{u}$ et un vecteur $\vec{v}$ tels que $\vec{u}.\vec{v}=2$.
* Dans toute expérience aléatoire, quels que soient les événements A et B,

$$P\left(A\right)=P\left(B\right)⇒A=B$$

* Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I et $a\in I$. Si $f^{'}\left(a\right)=0$ alors $a$ est un extrémum de $f$ sur I.
* Il existe une unique fonction définie sur $R$ ayant comme fonction dérivée la fonction constante égale à 5.

**Exercice** **18 :**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*(justifier !)*

$f$ désigne la fonction inverse.

* Pour tout nombre réel $x\ne 0, f^{'}\left(x\right)<0.$
* Il existe un nombre réel $x\ne 0 tel que f^{'}\left(x\right)=-1.$
* Pour tout nombre réel $x\ne 0, f^{'}\left(x\right)\geq -1.$

**Exercice** **19 : (DM)**

$f$ est la fonction définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\left(3x^{2}-5\right)\left(-2x+3\right)$ et

$g$ est la fonction définie sur $R$ par $g\left(x\right)=-6x^{3}+9x^{2}+10x+30$.

1. Montrer que pour tout réel $x, f^{'}\left(x\right)=-18x^{2}+18x+10.$
2. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*(justifier !)*
	1. Il existe un nombre réel $x$ tel que $ f^{'}\left(x\right)=0.$
	2. Pour tout nombre réel $x, f^{'}\left(x\right)\leq 0.$
	3. Pour tout nombre réel $x, f^{'}\left(x\right)=g^{'}\left(x\right).$
	4. Il existe une tangente à la courbe représentative de $f$ parallèle à la droite d’équation $y=x.$

**Sources :** Indice 1ière ; CQFD 1ière ; Variations 1ière ; Hyperbole 1ière; exercices des uns et des autres