Raisonnement et Logique Cours seconde

En jaune, remarques pour l'enseignant

I/ Liens entre des propositions : des définitions

1. Proposition

Définition : Une *proposition mathématique* est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

Remarque : soit vrai soit faux mais pas les deux à la fois.

Exemples :

La proposition A : « 2 est un nombre pair » est une proposition vraie.
La proposition B : « $2 \times 3 = 7$ » est une proposition fausse.

Remarque : x désignant un nombre réel, l'énoncé « $x > 3$ » n'est pas une proposition, on ne peut pas dire si l'énoncé est vrai ou faux.

Remarque : une proposition peut dépendre d'une variable exemple A(x). Plutôt en première ?

2. Implication

Définition :
Une *implication* est une proposition mathématique de la forme : « si A alors B »

Notation : « si A alors B » peut se noter « $A \Rightarrow B$ », ce qui se lit : « A implique B ».

Remarque : Une implication peut être vraie ou fausse.

Exemple 1 :
« Si I est le milieu du segment [EF] alors les points E, I et F sont alignés » est une implication vraie.

Exemple 2 :
« Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ » est une implication vraie.
« Si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ » est une implication fausse, en effet $(-2)^2 = 4$ et $-2 \neq 2$.

3. Réciproque d'une implication

Définition :
La *réciproque de l'implication* « si A alors B » est l'implication : « si B alors A »

Remarque : Une implication et sa réciproque peuvent être vraies ou fausses indépendamment l'une de l'autre.

Exemple 1 :

L'implication « s'il pleut alors il y a des nuages » est vraie.
Sa réciproque : « s'il y a des nuages alors il pleut » est fausse.

Exemple 2 :

Soit P : « ABC est un triangle rectangle en A » et Q : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »
« P implique Q » est une proposition vraie.
« Q implique P » est une proposition vraie.

4. Équivalence

Soit n un entier naturel, l'implication suivante « si n est un multiple de 10 alors n se termine par 0 » est vraie.
Énoncer la réciproque de cette implication.
Est-elle vraie ?
On peut alors écrire « n est un multiple de 10 équivaut à n se termine par 0. »

Définition : Lorsque les deux implications « P ⇒Q » et « Q ⇒P » sont vraies, on dit que « P est équivalent à Q ».

On peut dire également : « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ».

Notation : « P est équivalent à Q » peut se noter « P ⇔Q ».

Exemple :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

Si P implique Q et Q implique P sont toutes les deux fausses, on a aussi P équivalent à Q.

5. Négation d'une proposition

Définition :
La *négation d'une proposition mathématique* est la proposition obtenue en affirmant son contraire.

A faire évoluer en première ou terminale

Notation : la négation d'une proposition **A** est la proposition notée **non A**.

Exemples :
La négation de la proposition « 2 est un nombre pair » est la proposition « 2 n'est pas un nombre pair ».
La négation de la proposition « $2 < 3$ » est la proposition « $2 \geq 3$ ».

6. **Contraposée d'une implication**

Définition :
La contraposée de l'implication « si A alors B » est
l'implication « si non B alors non A ».

***Remarques* : Une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.**
Une implication est équivalente à sa contraposée.

Exemple 1 :
L'implication « s'il pleut alors il y a des nuages » est vraie.
Sa contraposée : « s'il n'y a pas de nuages alors il ne pleut pas » est vraie.

Exemple 2 :
Soit n un entier naturel.
La contraposée de l'implication « si n^2 est pair alors n est pair » est :
« si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair ».

II/ Connecteurs « ET » et « OU »

En mathématiques « OU » et « ET » ont des significations bien précises.

- **La proposition « A ET B » est vraie quand, et seulement quand, A et B sont toutes les deux vraies.**

- **La proposition « A OU B » est vraie quand au moins l'une des deux est vraie.**

Remarque : en mathématiques ce "ou" n'est pas exclusif, contrairement à un certain sens usuel (on le traite lors des exercices ou exemples)

III/ Quantificateurs

x désignant un nombre réel, l'énoncé « $x < 7$ » n'est pas une proposition car on ne peut pas dire si l'énoncé est vrai ou faux. À partir de cet énoncé, on peut écrire les deux propositions suivantes :

1. « Pour tout nombre réel x, on a $x < 7$ ». Cette proposition est ici fausse.

L'expression « **Pour tout** » est appelée **quantificateur universel**.
Une proposition mathématique dans laquelle figure l'expression « **Pour tout** » est appelée une *proposition universelle*.

2. « Il existe un nombre réel x tel que $x < 7$ ». Cette proposition est ici vraie.
   En mathématiques, « Il existe un » signifie « il existe au moins un ».

L'expression « **Il existe** » est appelée **quantificateur existentiel**.
Une proposition mathématique dans laquelle figure l'expression « **Il existe** » est appelée une *proposition existentielle*.

- Pour montrer qu'**une proposition universelle** est vraie, il est nécessaire de montrer qu'elle est vraie dans tous les cas (un exemple ne suffit pas !).
  Pour montrer qu'elle est fausse, il suffit de trouver un cas où elle est mise en défaut. On parle de contre-exemple.
- Pour montrer qu'**une proposition existentielle** est vraie, il suffit de trouver un exemple.
  En revanche pour montrer qu'elle est fausse, il est nécessaire de montrer qu'elle n'est jamais vraie.