**Différents types de raisonnement pour démontrer 2e**

1. *Démontrer en utilisant un contre-exemple* :

Pour démontrer que la proposition P est fausse, il suffit de trouver un exemple, appelé *contre-exemple* mettant en échec P.

Exemples :

* La proposition « Si un entier *n* est divisible par 5 et par 10 alors il est divisible par 50 » est fausse : 30 est divisible par 5 et par 10 mais n’est pas divisible par 50.
* La proposition « Un nombre est toujours rationnel » est fausse : $\sqrt{2}$ n’est pas rationnel.
1. *Démontrer en utilisant la contraposée* :

Pour démontrer que l’implication $A⟹B$ est vraie, il est équivalent de démontrer que sa contraposée est vraie, c’est-à-dire que l’implication $non B⟹non A$ est vraie.

Exemple : Démontrer que si le carré d’un entier relatif *n* est pair alors *n* est pair.

On démontre la contraposée : « Si *n* n’est pas pair alors $n^{2}$ n’est pas pair »

C’est-à-dire : « Si *n* est impair alors $n^{2}$est impair ».

On suppose *n* impair donc il existe $k\in Z tel que n=2k+1$

Alors $n^{2}= \left(2k+1\right)^{2}=4k^{2}+4k+1=2\left(2k^{2}+2k\right)+1=2p+1$

Avec $p=2k^{2}+2k$ donc $p\in Z$ et $n^{2}$ est impair

La contraposée est donc vraie et donc la proposition de l’énoncé aussi.

1. *Démonstration par l’absurde :*

Pour démontrer qu’une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

Exemple : Démontrer que $\sqrt{2}\ne 1,414$

On suppose que $\sqrt{2}=1,414$

Or deux nombres égaux ont le même carré donc $\left(\sqrt{2}\right)^{2}=\left(1,414\right)^{2}$

C’est-à-dire $2=1,999396$ égalité fausse donc on obtient une contradiction

Et donc la proposition $\sqrt{2}=1,414$ est fausse : $\sqrt{2}\ne 1,414$

1. *Démonstration par disjonction des cas :*

Pour démontrer qu’une proposition est vraie sur un ensemble E, on peut « découper » cet ensemble en plusieurs parties et montrer que la proposition est vraie sur chacune des parties.

Exemple : Démontrer que pour tout entier relatif *n*, $n(n+3)$ est pair.

**1er cas** : *n* est pair

Donc il existe $k\in Z tel que n=2k$

Alors $n\left(n+3\right)=2k\left(2k+3\right)=2p$ avec $p=k(2k+3)$ donc $p\in Z$

Et $n\left(n+3\right)$ est pair

**2e cas** : *n* est impair

Donc il existe $k\in Z tel que n=2k+1$

Alors $n\left(n+3\right)=\left(2k+1\right)\left(2k+1+3\right)=\left(2k+1\right)\left(2k+4\right)=2\left(2k+1\right)\left(k+2\right)=2p$

Avec $p=(2k+1)(k+2)$ donc $p\in Z$

Et $n\left(n+3\right)$ est pair

Finalement, pour tout entier relatif *n*, $n(n+3)$ est pair.