Différents types de raisonnement pour démontrer 2e

1. *Démontrer en utilisant un contre-exemple* :

Pour démontrer que la proposition P est fausse, il suffit de trouver un exemple, appelé *contre-exemple* mettant en échec P.

Exemples :

- La proposition « Si un entier *n* est divisible par 5 et par 10 alors il est divisible par 50 » est fausse : 30 est divisible par 5 et par 10 mais n'est pas divisible par 50.
- La proposition « Un nombre est toujours rationnel » est fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

2. *Démontrer en utilisant la contraposée* :

Pour démontrer que l'implication $A \Longrightarrow B$ est vraie, il est équivalent de démontrer que sa contraposée est vraie, c'est-à-dire que l'implication $non\ B \Longrightarrow non\ A$ est vraie.

Exemple : Démontrer que si le carré d'un entier relatif *n* est pair alors *n* est pair.

On démontre la contraposée : « Si *n* n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair »

C'est-à-dire : « Si *n* est impair alors n^2est impair ».

On suppose *n* impair donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$

Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2p + 1$

Avec $p = 2k^2 + 2k$ donc $p \in \mathbb{Z}$ et n^2 est impair

La contraposée est donc vraie et donc la proposition de l'énoncé aussi.

3. *Démonstration par l'absurde :*

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

Exemple : Démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$

On suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$

Or deux nombres égaux ont le même carré donc $\left(\sqrt{2}\right)^2 = (1{,}414)^2$

C'est-à-dire $2 = 1{,}999396$ égalité fausse donc on obtient une contradiction

Et donc la proposition $\sqrt{2} = 1{,}414$ est fausse : $\sqrt{2} \neq 1{,}414$

4. *Démonstration par disjonction des cas :*

Pour démontrer qu'une proposition est vraie sur un ensemble E, on peut « découper » cet ensemble en plusieurs parties et montrer que la proposition est vraie sur chacune des parties.

Exemple : Démontrer que pour tout entier relatif n, $n(n+3)$ est pair.

1er cas : n est pair

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

Alors $n(n+3) = 2k(2k+3) = 2p$ avec $p = k(2k+3)$ donc $p \in \mathbb{Z}$

Et $n(n+3)$ est pair

2^{e} cas : n est impair

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$

Alors $n(n+3) = (2k+1)(2k+1+3) = (2k+1)(2k+4) = 2(2k+1)(k+2) = 2p$

Avec $p = (2k+1)(k+2)$ donc $p \in \mathbb{Z}$

Et $n(n+3)$ est pair

Finalement, pour tout entier relatif n, $n(n+3)$ est pair.