Université de Franche-Comté
UFR *Sciences et techniques*
Starter ST
Année 2022-2023

Pré-requis
Modifications le 22 novembre 2023

Bienvenue à l'UFR *Sciences et techniques*. Vos études de mathématiques au lycée doivent vous permettre de suivre dans de bonnes conditions l'enseignement dispensé en mathématiques lors de ce semestre.

Cette fiche est constituée d'une liste d'exercices au programme de la spécialité mathématiques que vous devriez savoir faire et savoir rédiger à votre arrivée en licence première année dans une filière scientifique (mathématiques, informatique, sciences physique, sciences de l'ingénieur) à l'université de Franche-Comté.

Nous vous proposons de faire ces exercices en ce tout début d'année. Si vous le souhaitez, vous pouvez bénéficier de 5 séances de 3 heures les 7, 8, 9, 12 et 13 septembre encadré.es par des enseignant.es qui pourront faire les compléments de cours dont vous auriez besoin.

1 Suites

Exercice 1.

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
   La suite (v_n) est-elle monotone ?
3. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.
4. On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par
$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$
5. (a) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
   (b) En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 2. 1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $4n > 2(n + 1)$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Soit les propriétés P_1 : « la suite (u_n) est arithmétique » et P_2 : « $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ ».
Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. La propriété P_1 implique la propriété P_2.
2. La propriété P_2 implique la propriété P_1.
3. Les propriétés P_1 et P_2 sont équivalentes.

Exercice 4. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}.$$

1. Calculer les termes u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On admet que pour tout entier n , $u_n \neq 1$. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Pour tout entier n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que la suite (v_n) est géométrique (préciser la raison).
   (c) Pour tout entier n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 5. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Exercice dont il faut terminer la rédaction.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Représenter la fonction f puis la suite u_n
3.
4. Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 6.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 0$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 7.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}$.
2. La suite (I_n) est-elle convergente ?

Exercice 8.
Pour tout entier n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_1.
2. Calculer $u_0 + u_1$.
3. En déduire la valeur de u_0.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{e^n - 1}{n}$.
5. Calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t}\mathrm{d}t$.
7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 9.
Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\mathrm{d}x$.

1. démontrer que $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$ et $J = 1 + I$.
2. En déduire I et J.

2 Ensembles - Raisonnement

Exercice 10. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 11. Soit $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi(n) \geq n$.

Exercice 12.
1. Donner la définition d'un nombre rationnel. Définir un nombre irrationnel.
2. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{5}$ est-il rationnel ?
3. $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{8}{5}$ est-il rationnel ?
4. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
5. Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.
6. Trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit rationnelle, trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit irrationnelle. Même question avec le produit.

Exercice 13. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
Si a et b sont irrationnels, alors :

1. $a + b$ est irrationnel.
2. ab est irrationnel.
3. a^2 est rationnel.
4. aucune des trois réponses précédentes.

Exercice 14. Choisir la (ou les) réponse(s) correcte(s).
La négation de « tous les élèves du groupe sont des filles » est :

— « tous les élèves du groupe sont des garçons ».

— « tous les élèves du groupe ne sont pas des garçons ».

— « au moins un des élèves du groupe n'est pas une fille ».

— aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Exercice 15. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
La négation de « l'équation $f(x) = 0$ admet une solution réelle » est :

1. « l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle ».
2. « l'équation $f(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions réelles ».
3. « l'équation $f(x) = 0$ admet une infinité de solutions réelles ».
4. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

3 Fonctions

Exercice 16. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2.x^2}}$. Calculer $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ puis généraliser.

Exercice 17. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{I}, (f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{I}$.

Exercice 18. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
La proposition « f est une fonction dérivable en a » a pour expression formalisée :

1. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est réelle ».
2. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie ».
3. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'existe pas ».

Exercice 19. La proposition « La courbe représentative de f admet une tangente au point $(a, f(a))$ » a pour expression formalisée :

1. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est réelle ».
2. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie ».
3. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'existe pas ».

Exercice 20. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Considérons la proposition $\mathcal{P}$: « S'il existe un réel a tel que $f'(a) = 2$, alors f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. »

1. Écrire la contraposée de $\mathcal{P}$.
2. Écrire la négation de $\mathcal{P}$.

3. Écrire la réciproque de $\mathcal{P}$.
4. Étudier la véracité de ces quatre propositions.

Exercice 21.
La fonction numérique f de variable réelle x est définie par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

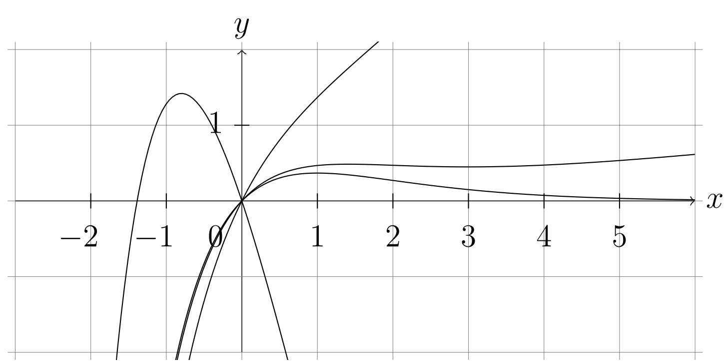
1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Étudier les variations de la fonction f puis en déduire le maximum et le minimum de cette fonction.

Exercice 22.

1. On définit la fonction $g : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ par $g(\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$.
   Déterminer les extrema de g.
2. Déterminer les valeurs de θ, appartenant à l'intervalle $]-\pi;0]$, pour lesquelles $\cos(\theta).\sin(\theta)$ est extremal.

Exercice 23. On considère pour tout réel k, la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = xe^{-x} + kx$. On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative.

1. Justifier que si $k > 0$ alors $f_k(x)$ est du signe de x.
2. Déterminer la limite de f_k en $+\infty$ en distinguant les cas : $k > 0$, $k = 0$ et $k < 0$.
3. (a) Calculer $f_k'(x)$ puis $f_k''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f_k' .
4. Les courbes ci-dessous sont les courbes représentatives des fonctions f_{-4} , $f_{0,1}$, f_0 et f_1.

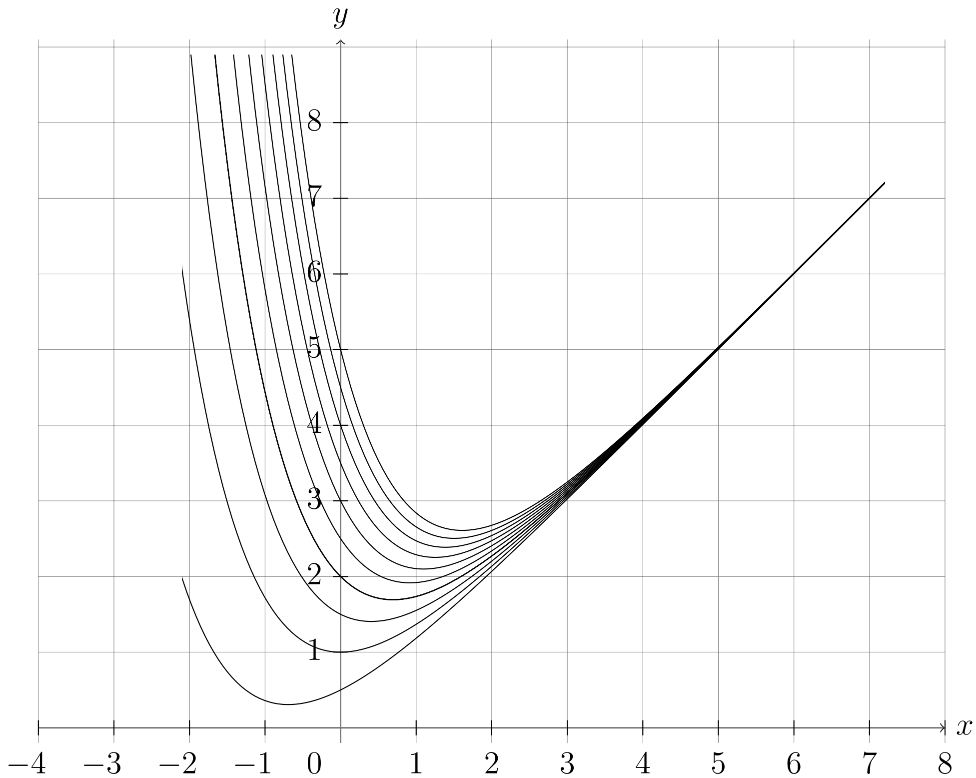


Reconnaître chaque courbe. On justifiera à l'aide des questions précédentes.

Exercice 24. Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

Exercice 25. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s) :
Si f est définie en a alors nécessairement :

1. f est continue en a.
2. $\ln(f)$ est définie en a.
3. $\dfrac{1}{f}$ est définie en a.
4. $\dfrac{1}{e^f}$ est définie en a.

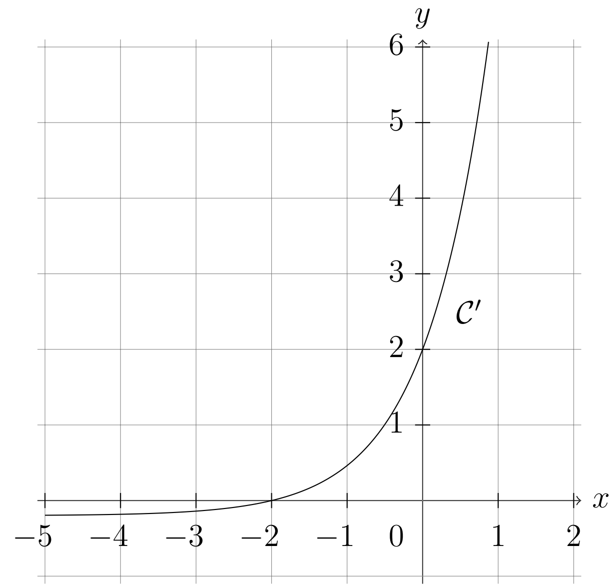
Exercice 26.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère une fonction f dérivable sur $[-5; +\infty[$ telle que :

- $f(-2) = 3$
- la dérivée f' admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci-contre.

Proposition *: La fonction f est croissante sur son domaine de définition.*

Indiquez si la proposition est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.



Exercice 27.
Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2+1} \mathrm{d}t$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 28. Résoudre l'inéquation $\cos(2x) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$.

4 Développement, factorisation, équations, inéquations

Exercice 29. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
x et y étant deux nombres réels, la négation de $x^2 = y^2$ est :

1. $x \neq y$.
2. $x \neq y$ ou $x \neq -y$.
3. $x \neq y$ et $x \neq -y$.
4. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Exercice 30.
Les polynômes ci-dessous ont une racine évidente (réelle ou complexe). La repérer puis factoriser chaque polynôme.

1. $x^2 - 5x + 6$.
2. $3x^2 - 5x$.
3. $-x^2 + 4$.
4. $7x^2 - 8x + 1$.
5. $3x^2 - 7x + 2$.
6. $x^2 + 4$.
7. $-x^2 + 5x - 6$.

8. $x^2 + x + 1$.
9. $x^3 - 1$.
10. $x^3 - x^2 + x - 1$.
11. $x^4 - 1$.
12. $x^3 - 2x^2 + x$.
13. $-x^3 - x^2 + 4x - 4$.
14. $2x^3 - x^2 + x$.

Exercice 31.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $33x^2 + 55x = 0$;
2. $(2x-5)^2 - (4x-1)^2 = 0$;
3. $2x^2 + 26x + 3 = 0$;
4. $\sqrt{3}x^2 + 6x + 3\sqrt{3} = 0$;
5. $3x^2 + 8x + 6 = 0$;
6. $\dfrac{15}{x} + \dfrac{12}{x-1} = 11$;
7. $\dfrac{3x^2 - 8x - 16}{x-4} = 2x$.

5 Calcul trigonométrique

Exercice 32.
Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\cos(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $\cos(\frac{1}{4}x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
4. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
5. $\cos(x) = \sin(x)$.

Exercice 33.
Les exercices de trigonométrie sur le site du lycée Valin vous permettent de vous entraîner : http://lycee-valin.fr/maths/exercices_en_ligne/trigo.html.
Les tous premiers exercice du site exo7 également : http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00081.pdf

6 Intégrales - Équation différentielle

Exercice 34. (E) est l'équation différentielle $y' + 2y = e^{3x}$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{5}$ est une solution particulière de (E).
2. Démontrer que f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 35.
Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Pour tout réel $l \geq 1$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_1^t f(t)\mathrm{d}t$.

1. Donner une représentation graphique de F.
2. Calculer $F(t)$ en fonction de t.
3. Calculer la limite de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

Exercice 36.
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x.\ln(x) - 1$.

Partie A : Étude d'une fonction

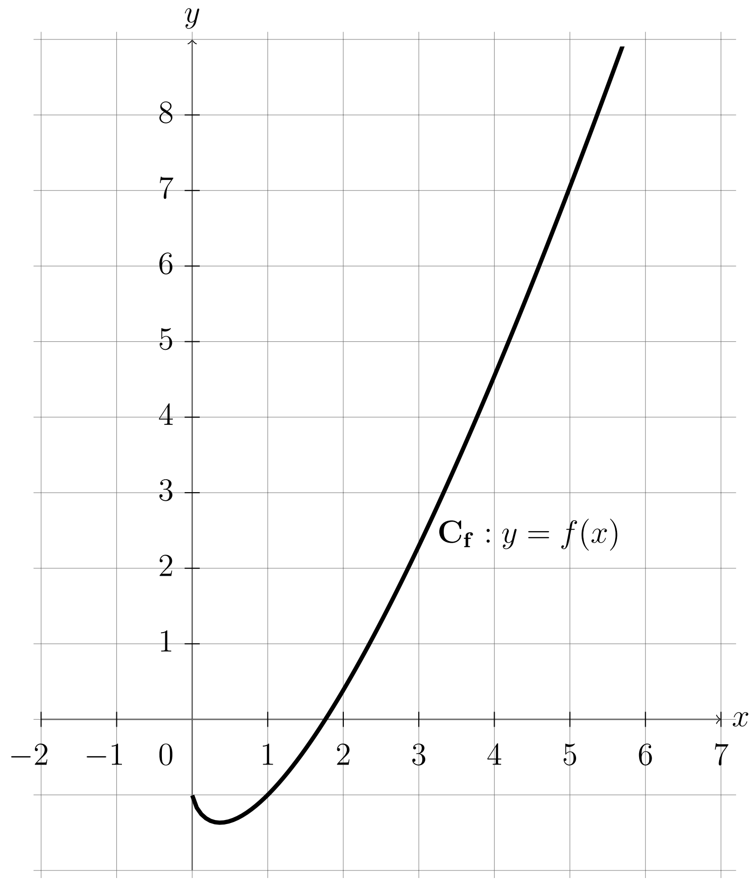
1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0; +\infty[$. On note α cette solution. déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0; +\infty[$.
5. Montrer que $\ln(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$

Partie B : calcul d'une intégrale

On considère la courbe $\mathcal{C}_f$, représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné ci-contre.
2. Montrer que la fonction F qui à x associe $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(x) - \dfrac{x^2}{4} - x$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer que $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln(2) - 8$. En déduire une valeur approchée de I.



Exercice 37.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x.e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par partie.