Raisonner, rédiger

On peut très bien comprendre une égalité d'ensembles ou l'équivalence de deux propositions en les lisant sans se sentir le moins du monde capable de les démontrer. « Je ne sais pas par où commencer. » Vous trouverez justement dans cette annexe de quoi commencer vos preuves, entre autres choses. Quel premier pas pour montrer une implication ? Quel premier pas pour montrer une inclusion ? Le premier pas est avant tout une affaire de bonne rédaction. Tant qu'on fait des mathématiques assez faciles, la rédaction n'a que des vertus esthétiques, bien rédiger revient seulement à rédiger selon les canons de la correction et de l'élégance. Dès qu'on touche à des raisonnements délicats au contraire, bien rédiger c'est essentiellement bien penser, c'est-à-dire penser avec méthode et rigueur.

Votre salut mathématique dépendra cette année en grande partie de votre capacité à intérioriser le contenu des paragraphes qui suivent et à en faire des réflexes. Relisez régulièrement cette annexe au gré de vos lacunes et de vos besoins. Et surtout :

Maîtrisez-vous, chaque mot et chaque symbole vous engagent.

Facile à dire, difficile à faire. Le génie est rarissime, mais tout le monde peut s'auto-discipliner, progresser en mathématiques et y prendre du plaisir.

Sommaire

1 Axiomes, définitions, théorèmes

- **Axiomes :** Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle *axiomes* les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

  Nous aurons très peu l'occasion de rencontrer les axiomes sur lesquels les mathématiques sont traditionnellement fondés. Dans notre démarche de fondement pourtant, tout au long de l'année, nous aurons à cœur de démontrer presque tous les énoncés que nous manipulerons — mais pas tous, nous ne remonterons pas en-deçà d'un certain point. Précisément, nous admettrons l'existence des nombres réels avec toutes les propriétés que nous leur connaissons, alors que les mathématiques en réalité, loin d'accepter les réels sans discussion, sont capables d'en offrir une construction à partir d'axiomes plus élémentaires.

- **Définitions :** On appelle *définition* toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. Une définition crée ainsi une classe d'objets — les oiseaux, par exemple — réunis autour d'un certain nom — le mot « oiseau » — lequel résume une certaine propriété — « animal à plumes ».

  Pourquoi un nom « jusqu'ici inusité » ? Tout simplement parce qu'il ne faut pas qu'un même nom puisse signifier des choses différentes. L'homonymie est tolérée dans le langage usuel mais pas en mathématiques par souci de rigueur formelle. La situation du mot « verre » par exemple, à la fois matériau brut et objet dans lequel je bois, est interdite en mathématiques.

Pour définir la classe des objets « machin », deux rédactions possibles :

« On appelle *machin* tout objet tel que… »

ou bien :

« Soit x un objet. On dit que x est un *machin* s'il vérifie… »

- **Théorèmes :** On appelle *théorème* toute proposition d'une théorie que l'on a pu démontrer à partir de ses axiomes. Une théorie n'est finalement qu'un empilement ordonné d'axiomes, de démonstrations et de théorèmes. Trois autres mots sont couramment utilisés pour désigner certaines formes de théorèmes :
  - **Lemmes :** On appelle *lemme* tout théorème préparatoire à la démonstration d'un « plus gros » théorème. La démonstration d'un gros théorème peut ainsi se trouver saucissonnée en morceaux plus petits.
  - **Corollaires :** On appelle *corollaire* tout théorème qui est une conséquence presque immédiate d'un « plus gros » théorème.
  - **Caractérisations :** On appelle *caractérisation* tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc au fond ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition ». Exemple bien connu :

Définition (Fonction croissante) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *croissante sur I* si : $\forall x, y \in I, \quad \big(x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)\big).$

Voilà pour la définition. Le théorème suivant redéfinit la notion de croissance dans le cas des fonctions **DÉRIVABLES**.

Théorème (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **DÉRIVABLE**. Alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I.

2 Introduire une variable, donner un nom à un objet

La première règle de rédaction en mathématiques, c'est que **TOUT OBJET DONT ON PARLE DOIT ÊTRE INTRODUIT**. En français, si vous dites : « Elle les lui a donnés hier » sans avoir précisé auparavant qui sont « elle », « les » et « lui », personne ne vous comprendra. En maths c'est pareil, vous devez présenter tout ce dont vous parlez et vous mettre à la place de vos interlocuteurs.

On a recours à deux types de symboles pour désigner les objets en mathématiques — les *variables* et les *constantes*.

- **Introduire une variable :** Quand on se donne un réel x quelconque, on dit que x est une *variable*. Cette variable n'a pas de valeur définie, elle représente à elle seul tous les réels, n'importe lequel. En d'autres termes, pour parler de tous les objets d'un ensemble, on en prend un quelconque, indéfini, et on parle de **CET** objet pour parler de **TOUS** ceux qu'ils représente.

Quand on veut introduire une variable x pour représenter tous les éléments d'un ensemble E, on écrit :

« Soit $x \in E$. » Acte de naissance de la variable x.

$\vdots$ Vie de la variable x.

L'introduction d'une variable x par « Soit » est un acte de naissance pour x. À l'instant d'avant, x ne désignait aucun objet, et tout à coup, par la magie du verbe, x se met à signifier quelque chose. Mais jusqu'à quand ? Grosso modo jusqu'à la fin de la preuve en cours. Une fois qu'une preuve est terminée, les variables qui y figuraient sont renvoyées au néant et ne désignent plus rien, elles meurent. La bonne nouvelle, c'est qu'en mathématiques, la mort n'est pas une fin mais la possibilité d'une nouvelle vie. Il suffit d'un nouveau « Soit » pour que x renaisse avec un sens différent.

Quand on sait que la variable x aura une courte vie, on peut préférer écrire en français : « Pour tout $x \in E$: ... » plutôt que : « Soit $x \in E$. Alors : ... »

Exemple Le calcul de la dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln\left(x^2+1\right)$ ne doit pas ressembler à : « $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ », mais se présenter sous l'une des formes suivantes, au choix :

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. » ou : « Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. »

Certaines variables échappent à l'expression « Soit » et sont introduites directement par le symbole mathématique $\sum, \prod, \int \ldots$ au cœur duquel elles figurent. Par exemple, dans $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$, les variables k et t naissent et meurent avec les symboles $\sum$ et $\int$ tandis que les variables n et x doivent être introduites proprement en amont.

- **Donner un nom à un objet :** De nombreux symboles mathématiques désignent des objets singuliers parfaitement définis qu'on appelle des *constantes*. Pensez aux symboles 3, π et cos, ce ne sont pas des variables, mais des individus qui ne représentent qu'eux-mêmes. Autre exemple, on note $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cet ensemble est totalement fixé, c'est une constante.

  Au-delà de ces exemples de notations universelles, vous aurez vous-mêmes l'occasion d'introduire vos propres constantes. Il arrive en effet souvent qu'une quantité un peu longue ou compliquée à écrire revienne plusieurs fois dans une preuve, par exemple un réel comme $\dfrac{\mathrm{e}^\alpha+1}{\alpha^2+1}$ où α est un réel déjà introduit proprement. Pour plus de légèreté en lecture et en écriture, on a coutume de donner un petit nom plus simple à cette expression, par exemple K. Au lieu d'écrire $\dfrac{\mathrm{e}^\alpha+1}{\alpha^2+1}$ partout, on écrira simplement K, c'est plus court.

  Pour donner le nom K à la quantité $\dfrac{\mathrm{e}^\alpha+1}{\alpha^2+1}$, on écrit :

  « On pose $K = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha+1}{\alpha^2+1}$. » ou bien : « On note K le réel $\dfrac{\mathrm{e}^\alpha+1}{\alpha^2+1}$. »

  À GAUCHE, le choix du nom K suppose que la lettre K n'est pas déjà le nom d'un autre objet.

  À DROITE, la quantité à laquelle on donne un nom ne doit contenir que des objets déjà introduits, ici α.

  Quand le réel α n'a pas été fixé une fois pour toutes parce qu'on sera amené à lui donner différentes valeurs dans la preuve en cours : $\alpha = 0$, $\alpha = 1\ldots$ il vaut mieux nommer K_α le réel $\dfrac{\mathrm{e}^\alpha+1}{\alpha^2+1}$ plutôt que K pour ne pas perdre de vue qu'il dépend de α.

  Vous avez tendance à confondre les deux expressions « On pose » et « On note », attention ! Elles ne s'emploient pas de la même façon sur le plan grammatical.

  Vous avez aussi tendance à confondre « Soit » et « On pose/on note », par exemple en écrivant : « Soit f la fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. » Comme il s'agit d'une fonction fixée parfaitement connue, il vaudrait mieux écrire : « On note f la fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. »

Attention ! IL NE SUFFIT PAS DE DIRE OU DE VOULOIR QU'UN OBJET EXISTE POUR QU'IL EXISTE !

Vous prenez souvent vos désirs pour des réalités, ce qui produit des catastrophes. Toute phrase de la forme : « On note x l'unique objet pour lequel... » doit être observée avec circonspection. Un tel objet existe-t-il ? Pas sûr, et si c'est le cas, il faut le justifier. Par exemple, le raisonnement qui suit est faux pour la seule raison qu'il est sans objet, l'entier N n'y a aucune existence dès le départ.

Exemple On veut montrer que 1 est le plus grand des entiers naturels non nuls.

Démonstration On note N le plus grand des entiers naturels non nuls. Par l'absurde, si $N > 1$: $N^2 > N$ après multiplication par $N > 0$, donc N^2 est un entier naturel non nul strictement supérieur au plus grand d'entre eux, à savoir N — contradiction. Conclusion : $N = 1$.

3 Montrer une proposition universelle

On a souvent l'occasion d'introduire des variables en mathématiques car on a souvent à prouver des propositions universelles : $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$.

Quand on veut montrer que : $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$, on écrit **PAR RÉFLEXE** :

« Soit $x \in E$. Introduction de la variable x.
Montrons que $\mathscr{P}(x)$. »
$\vdots$ } Preuve de $\mathscr{P}(x)$.

Vous tenez là le seul début de preuve qui vaille en général pour démontrer une proposition universelle. À charge pour vous ensuite de prouver la proposition $\mathscr{P}(x)$, bien entendu !

Exemple On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

On part de cette inégalité triviale, mais au brouillon, on a mené l'enquête en partant du résultat.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que : $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Or $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc : $x^2+1 \geqslant 2x$, et enfin : $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4 Montrer l'existence d'un objet

On a souvent l'occasion d'utiliser l'expression « On pose/on note » en mathématiques car on a souvent à prouver des propositions existentielles : $\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$.

Quand on veut montrer que : $\exists x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$ et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété $\mathscr{P}$, on écrit **PAR RÉFLEXE** :

« Posons $x = \ldots$ L'exemple qu'on a en tête.
Vérifions que $\mathscr{P}(x)$. »
$\vdots$ } Vérification que x satisfait la propriété $\mathscr{P}$.

Souvent, la difficulté ne consiste pas à vérifier que x a la propriété $\mathscr{P}$, mais à avoir l'idée d'un exemple de tel objet x. Il n'existe hélas pas de règle générale pour avoir des idées. Nous y reviendrons tout de même un peu plus loin dans le paragraphe sur l'analyse-synthèse.

Exemple On veut montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad \exists z \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{z} > x + y$.

Démonstration Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Posons $z = (x+y+1)^2$. Alors d'une part z est un entier naturel, et d'autre part : $\sqrt{z} = |x+y+1| = x+y+1 > x+y$.

Après réflexion !

5 Montrer l'unicité d'un objet

Le raisonnement suivant n'est pas le seul raisonnement possible pour montrer l'unicité d'un objet. Nous approcherons le problème d'une autre manière en découvrant l'analyse-synthèse.

> Quand on veut montrer qu'un ensemble E contient $\underbrace{\textbf{AU PLUS UN}}_{\text{C'est cela l'unicité.}}$ élément vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, on peut procéder ainsi :
>
> « Soient $x, x' \in E$.
> Faisons l'hypothèse que $\mathscr{P}(x)$ et $\mathscr{P}(x')$.
> Montrons que $x = x'$. »
>
> $\left.\vdots\quad\right\}$ Preuve que $x = x'$.

Attention !

- Montrer l'unicité d'un objet dans un ensemble E vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, ce n'est pas montrer la proposition : $\exists!\, x \in E, \quad \mathscr{P}(x),$ car cette proposition n'affirme pas seulement l'unicité de x mais aussi son **EXISTENCE** à travers le symbole « $\exists$ ». « Au plus un » ne signifie pas « exactement un ».
- Il n'est pas nécessaire de raisonner par l'absurde en supposant x et x' différents. On prend deux objets x et x' qui ont la même propriété. Si on arrive à montrer qu'ils sont **FORCÉMENT** égaux, cela montre l'unicité souhaitée.

Exemple On veut montrer qu'il existe un et un seul $x \in \mathbb{R}_+$ pour lequel $x^2 = 1$.

Démonstration

- **Existence :** Posons $x = 1$. Comme voulu : $\quad x \in \mathbb{R}_+ \quad$ et $\quad x^2 = 1$.
- **Unicité :** Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $x^2 = x'^2 = 1$. En particulier : $\quad x = x' \quad$ ou $\quad x = -x'$. Or si jamais : $\underbrace{x}_{\geqslant 0} = \underbrace{-x'}_{\leqslant 0}$, x et x' sont nuls, donc $x = x'$. Dans les deux cas : $\quad x = x'$.

6 Montrer une disjonction, une implication ou une équivalence

- **Montrer une disjonction :** On rappelle que les propositions : $\quad p$ ou $q \quad$ et : $\quad (\text{non } p) \Longrightarrow q \quad$ sont équivalentes. En d'autres termes, dire que p ou q est vraie, c'est dire que si p est fausse, forcément q est vraie.

> Quand on veut montrer que : $\quad p$ ou q, $\quad$ on procède généralement ainsi :
>
> « Supposons p fausse.
> Montrons que q est vraie. »
>
> $\left.\vdots\quad\right\}$ Preuve de q.

Exemple On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \max\left\{x^2, (x-2)^2\right\} \geqslant 1$.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que : $\quad x^2 \geqslant 1 \quad$ ou $\quad (x-2)^2 \geqslant 1$. Supposons pour cela $x^2 < 1$ et montrons qu'alors : $\quad (x-2)^2 \geqslant 1$. Or puisque $x^2 < 1$: $\quad -1 < x < 1$, $\quad$ donc : $\quad -3 < x - 2 < -1$, et comme la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$: $\quad (x-2)^2 \geqslant (-1)^2 = 1$.

- **Montrer une implication :**

Quand on veut montrer que : $p \Longrightarrow q$, on écrit **PAR RÉFLEXE** :

« Supposons p vraie.
Montrons que q est vraie. »

$\vdots$ } Preuve de q.

Exemple On veut montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $x - x^2 \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in \{0,1\}$.

Démonstration Soit $x \in [0,1]$. On suppose que $x - x^2 \in \mathbb{N}$. Montrons que $x \in \{0,1\}$.
Nous connaissons bien les fonctions polynomiales du second degré. Ici : $0 \leqslant x - x^2 \leqslant \frac{1}{4}$, où $\frac{1}{4}$ est la valeur du maximum atteint au milieu des racines 0 et 1 en $\frac{1}{2}$. Comme $x - x^2 \in \mathbb{N}$, il en découle que $x - x^2 = 0$, donc x vaut 0 ou 1.

Attention ! La flèche d'implication « $\Longrightarrow$ » **NE** signifie **PAS** « donc » et on l'utilise **RAREMENT**.

Quand on fait un raisonnement du type : « p est vraie donc q est vraie », c'est la conclusion : « q est vraie » qu'on vise, c'est elle qu'on affirme haut et fort. La proposition p n'est qu'un moyen au service de cette fin. En d'autres termes, quand on dit : « p est vraie donc q est vraie », ce **N'**est **PAS** l'implication : $p \Longrightarrow q$ qu'on affirme, car cette implication ne garantit ni que p est vraie, ni que q est vraie.

Autre manière de dire les choses, l'implication : $p \Longrightarrow q$ est une proposition alors que la phrase : « p est vraie donc q est vraie » est un **RAISONNEMENT**, i.e. un enchevêtrement complexe de propositions :

$$p \text{ est vraie} \quad \underbrace{\textbf{ET} \quad \text{il est vrai que } p \Longrightarrow q,}_{\text{sous-entendu}} \quad \textbf{DONC} \quad q \text{ est vraie.}$$

En pratique, ce sont des raisonnements qu'on mène le plus souvent, qui requièrent des « donc » ou des mots apparentés comme « ainsi », « par conséquent », « dès lors »... Je ne veux pas voir de flèches à la place de ces mots.

La flèche d'implication n'a-t-elle donc aucune utilité en mathématiques ? Bien au contraire ! Généralement sous-entendue comme on vient de le voir, elle est peu présente physiquement, mais les définitions en sont truffées par exemple. Dans la définition de la croissance du début de ce texte, la proposition : $\forall x, y \in I, \ \big(x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\big)$ n'est pas un raisonnement et la flèche y est parfaitement à sa place.

- **Contredire une implication :** On rappelle que les propositions : non $(p \Longrightarrow q)$ et : p et (non q) sont équivalentes. Les propositions : non $\big(\forall x \in E, \ \mathscr{P}(x) \Longrightarrow \mathscr{Q}(x)\big)$ et : $\exists x \in E, \ \mathscr{P}(x)$ et $\big(\text{non } \mathscr{Q}(x)\big)$ le sont donc aussi. Ainsi, dire que le prédicat $\mathscr{P}$ n'implique pas $\underbrace{\textbf{TOUJOURS}}_{\forall}$ le prédicat $\mathscr{Q}$, c'est dire que $\underbrace{\textbf{DANS CERTAINS CAS}}_{\exists}$, $\mathscr{P}$ peut être vrai sans que $\mathscr{Q}$ le soit.

Quand on veut montrer que : $p \Longrightarrow q$ est **FAUSSE**, on écrit **PAR RÉFLEXE** :

« Montrons que p est vraie.

$\vdots$ } Preuve de p.

Montrons que q est fausse. »

$\vdots$ } Preuve que q est fausse.

Exemple Il est faux que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Longrightarrow \sin x \leqslant \sin y$. Bref, la fonction sinus n'est pas croissante.

Démonstration Nous devons montrer que : $\exists\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y$ et $\sin x > \sin y$. Posons $x = \frac{\pi}{2}$ et $y = \pi$. Alors en effet : $x < y$ et $\sin x = 1 > 0 = \sin y$.

Après réflexion !

- **Montrer une équivalence :**

Quand on veut montrer que : $p \Longleftrightarrow q$, deux possibilités :

— soit on raisonne par double implication :

« • Supposons p vraie.
Montrons que q est vraie.

$\vdots \quad \Big\}$ Preuve de q.

• Réciproquement, supposons q vraie.
Montrons que p est vraie. »

$\vdots \quad \Big\}$ Preuve de p.

— soit on raisonne directement par équivalence en changeant peu à peu p en q :

$$\text{« } p \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad q. \text{ »}$$

Exemple On veut montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$.

Démonstration Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication directe est triviale, car si $x = y = 0$: $x^2 + y^2 = 0$. Pour la réciproque, si $x^2 + y^2 = 0$: $\underbrace{x^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{-y^2}_{\leqslant 0}$, donc : $x^2 = -y^2 = 0$ et enfin $x = y = 0$.

✖ **Attention !** La double flèche d'équivalence « $\Longleftrightarrow$ » **NE** signifie **PAS** « c'est-à-dire » et on l'utilise **RAREMENT**.

Tout comme la flèche « $\Longrightarrow$ », le symbole « $\Longleftrightarrow$ » est plus rare d'utilisation qu'il n'y paraît et ne doit être employé **QUE** lorsque c'est l'équivalence elle-même qu'on veut affirmer indépendamment de la vérité des propositions qui la composent. Nous utiliserons la double flèche « $\Longleftrightarrow$ » essentiellement pour :

— résoudre des équations/inéquations,

— montrer des égalités d'ensembles (cf. paragraphe suivant).

Dans un raisonnement où l'on veut dire « c'est-à-dire » pour relier deux propositions vraies, on dit « c'est-à-dire » ou « i.e. » (locution latine *id est*), on n'emploie pas la double flèche !

✖ **Attention !** Toute utilisation de la double flèche « $\Longleftrightarrow$ » vous engage en sens direct **ET EN SENS RÉCIPROQUE**.

Notre esprit pense plus facilement le « donc » que le « si et seulement si ». Vous le savez, donc faites attention. On peut sommer des (in)égalités, mais **PAS** les « dé-sommer ». Ainsi, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $a = b$ et $c = d \implies a + c \leqslant b + d$, mais le retour est impossible et c'est pareil avec des inégalités. Par exemple : $1 + 3 = 2 + 2$, mais $1 \neq 2$ et $3 \neq 2$. Plus généralement :

$$\big(\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = b_k\big) \quad \underset{\Longrightarrow \text{ OK !}}{\cancel{\Longleftrightarrow}} \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k,$$

et sur le terrain de l'intégration : $$\big(\forall x \in [a, b], \quad f(x) = g(x)\big) \quad \underset{\Longrightarrow \text{ OK !}}{\cancel{\Longleftrightarrow}} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

7 Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

- **Montrer une inclusion :**

> Quand on veut montrer une inclusion : $E \subset F$, on écrit PAR RÉFLEXE :
>
> « Soit $x \in E$.
> Montrons que $x \in F$. »
> $\vdots$ } Preuve que $x \in F$.

Exemple On veut montrer que : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \ \exists\, y \geqslant 0, \quad x \geqslant y\right\} \subset \mathbb{R}_+$.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que : $x \geqslant y$ $\overbrace{\text{pour un certain}}^{\exists}$ $y \geqslant 0$. Montrons que $x \in \mathbb{R}_+$. C'est immédiat : $x \geqslant y \geqslant 0$.

Exemple On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et on pose : $E = \left\{k(k+1) \mid \ k \in \mathbb{N}\right\}$. Alors $E \subset 2\mathbb{N}$.
En français, cela revient à dire que tout entier de la forme $k(k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$ est pair.

Démonstration Soit $n \in E$, disons $n = k(k+1)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $n \in 2\mathbb{N}$. Or soit k est pair et $k+1$ impair, soit k est impair et $k+1$ pair, donc dans tous les cas, k ou $k+1$ est pair. Par produit, $n = k(k+1)$ l'est aussi, donc appartient à $2\mathbb{N}$.

- **Montrer une égalité d'ensembles :**

> Quand on veut montrer une égalité d'ensembles $E = F$, deux possibilités :
>
> — soit on raisonne par double inclusion :
>
> « • Soit $x \in E$.
> Montrons que $x \in F$.
> $\vdots$ } Preuve que $x \in F$.
> • Réciproquement, soit $x \in F$.
> Montrons que $x \in E$. »
> $\vdots$ } Preuve que $x \in E$.
>
> — soit on raisonne directement par équivalence :
>
> « Pour tout x : $x \in E \iff \ldots \iff \ldots \iff x \in F$. »

Exemple On veut montrer que : $\mathbb{R}_- = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ \forall y > 0, \quad x \leqslant y\right\}$.

Démonstration

- Montrons que : $\mathbb{R}_- \subset \left\{x \in \mathbb{R} \mid \ \forall y > 0, \quad x \leqslant y\right\}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Nous devons montrer que : $\forall y > 0, \quad x \leqslant y$, mais c'est évident par hypothèse sur x.
- Montrons que : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \ \forall y > 0, \quad x \leqslant y\right\} \subset \mathbb{R}_-$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\forall y > 0, \quad x \leqslant y$. Montrons que $x \in \mathbb{R}_-$. Or si $x > 0$, alors pour $y = \dfrac{x}{2}$: $x \leqslant \dfrac{x}{2}$, donc : $x = 2x - x \leqslant 0$. Comme voulu : $x \in \mathbb{R}_-$.

Exemple Soient E et I deux ensembles et $\left\{A_i \mid \ i \in I\right\}$ un ensemble de parties de E. Alors : $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

Démonstration Pour tout $x \in E$: $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \iff \text{non}\left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) \iff \text{non}\left(\exists\, i \in I, \quad x \in A_i\right)$
$\iff \forall i \in I, \quad \text{non}\,(x \in A_i) \iff \forall i \in I, \quad x \in \overline{A_i} \iff x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

8 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence repose sur le principe suivant :

$$\underbrace{\text{si } \mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}} \qquad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}\right),}_{\text{Hérédité}} \qquad \text{alors :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n.$$

Quand on veut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n,$ on rédige ainsi :

« • **Initialisation :** . . . Vérification que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie.
Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. »

⋮ } Preuve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Attention ! Toute autre rédaction est exclue.

- Commencer l'hérédité par : « Supposons que **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie » est une erreur **gravissime**. Si on suppose la propriété vraie à **tous** les rangs, que reste-t-il à prouver ? On ne peut jamais montrer ce qu'on prend pour hypothèse.
- Une erreur moins grave à présent, mais c'est une incorrection quand même : « Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie **pour un certain** $n \in \mathbb{N}$ ». On voit souvent cela. Où est le problème ? La proposition : « $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ » s'écrit formellement : $\exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n,$ alors que l'hérédité repose sur le principe suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}\right)$ et ça n'a rien à voir ! La locution « pour un certain. . . » cache toujours la présence d'un quantificateur « $\exists$ ».

Exemple On veut montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe des entiers $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels : $a_1 < \ldots < a_n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$

Démonstration **Initialisation :** $2 < 3 < 6$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = 1.$

Hérédité : Soit $n \geqslant 3$. On suppose que pour certains entiers $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$: $a_1 < \ldots < a_n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$

Observons alors que : $\dfrac{1}{a_n+1} + \dfrac{1}{a_n(a_n+1)} = \dfrac{a_n+1}{a_n(a_n+1)} = \dfrac{1}{a_n}.$ Cela nous donne l'idée de poser $b_k = a_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, puis : $b_n = a_n + 1$ et $b_{n+1} = a_n(a_n+1)$. Par définition : $b_1, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{N}^*$.

Par hypothèse de récurrence : $b_1 < \ldots < b_{n-1} = a_{n-1} < a_n < a_n + 1 = b_n$. En outre : $0 < \dfrac{1}{a_n} < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \overset{\text{HDR}}{=} 1,$ donc : $a_n > 1$, donc : $b_n < a_n b_n = b_{n+1}$. En résumé : $b_1 < \ldots < b_{n+1}$.

Pour finir : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n} \overset{\text{HDR}}{=} 1.$

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$, mais seulement $\mathscr{P}_{n+2}$ de $\mathscr{P}_n$ **et** $\mathscr{P}_{n+1}$. Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante :

$$\underbrace{\text{si } \mathscr{P}_0 \text{ ET } \mathscr{P}_1 \text{ sont vraies}}_{\text{Initialisation}} \qquad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\mathscr{P}_n \text{ et } \mathscr{P}_{n+1}\right) \implies \mathscr{P}_{n+2},}_{\text{Hérédité}} \qquad \text{alors :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n.$$

Une telle récurrence est appelée une *récurrence double*. Les récurrences classiques sont dites *simples* et il existe bien entendu des récurrences *triples*, etc.

Quand on veut raisonner par récurrence **double** que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n,$ on rédige ainsi :

« • **Initialisation :** . . . Vérification que $\mathscr{P}_0$ **et** $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ vraies.
Montrons que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie. »

⋮ } Preuve que $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie.

Exemple On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 3$.

Démonstration Intuitivement, le calcul d'un terme de cette suite requiert toujours la connaissance des **DEUX** précédents — d'où l'idée qu'une récurrence **DOUBLE** est nécessaire.

Initialisation : $u_0 = 4 = 2^0 + 3$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $u_n = 2^n + 3$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3$. Aussitôt :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \overset{\text{HDR}}{=} 3\left(2^{n+1} + 3\right) - 2\left(2^n + 3\right) = (3-1)\ 2^{n+1} + (9-6) = 2^{n+2} + 3.$$

Il arrive aussi parfois qu'on ne sache déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ que de **TOUTES** les propositions antérieures $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n$. Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante :

$$\underbrace{\text{si } \mathscr{P}_0 \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}} \qquad \text{et si :} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathscr{P}_k\right) \implies \mathscr{P}_{n+1},}_{\text{Hérédité}} \qquad \text{alors :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}_n.$$

Une telle récurrence est appelée une *récurrence forte*.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_0 \geqslant 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant 2^n u_0$.

Démonstration On ne peut utiliser la relation : $u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour parler de u_{n+1} que si on a fait une hypothèse sur tous les nombres $u_0, \ldots, u_n$ — d'où l'idée qu'une récurrence **FORTE** est nécessaire.

Initialisation : $u_0 \leqslant u_0 = 2^0 u_0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $u_k \leqslant 2^k u_0$. Comme voulu :

$$u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\text{HDR}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 = \frac{2^{n+1} - 1}{2-1}\, u_0 \overset{u_0 \geqslant 0}{\leqslant} 2^{n+1} u_0.$$

9 LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Raisonner par l'absurde, c'est un peu prêcher le faux pour savoir le vrai. Pour commencer, on appelle *contradiction* toute proposition de la forme : q et (non q). Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi — si d'une proposition on arrive à tirer une *contradiction*, c'est qu'elle est fausse.

Quand on veut montrer qu'une proposition p est vraie, on peut raisonner par l'absurde de la manière suivante :

« Faisons l'hypothèse que p est **FAUSSE**.

$\vdots$ } Obtention d'une contradiction.

Contradiction ! Par conséquent p est vraie. »

Exemple On veut montrer que lorsqu'on se donne un entier naturel n, le réel $\sqrt{n^2+2}$ n'est pas un entier.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{n^2+2}$ est un entier noté p. Aussitôt : $p^2 = n^2 + 2$, donc : $(p+n)(p-n) = 2$. Ensuite, $p+n$ et $p-n$ sont des entiers par hypothèse sur n et p, et $p+n$ est positif et supérieur ou égal à $p-n$. Or le seul couple (a,b) d'entiers pour lesquels : $ab = 2$, $a \geqslant 0$ et $a \geqslant b$ est le couple $(2,1)$, donc : $p+n = 2$ et $p-n = 1$. Ainsi, par demi-somme : $p = \frac{3}{2}$, ce qui est contradictoire car p est un entier. Conclusion : $\sqrt{n^2+2}$ n'est pas un entier.

10 LE RAISONNEMENT PAR ANALYSE-SYNTHÈSE

Quand on veut déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathscr{P}$, on raisonne souvent par analyse-synthèse de la manière suivante.

« • **Analyse :** Soit $x \in E$.
Faisons l'hypothèse que $\mathscr{P}(x)$. »

$\vdots$ $\Big\}$ On part naïvement d'un élément x de propriété $\mathscr{P}$ et on essaie de le faire parler pour savoir qui il est. Quelles sont les têtes possibles de x ?

• **Synthèse :** Posons $x = \ldots$ ← Ici, les têtes possibles de x trouvées dans l'analyse.
Vérifions que $x \in E$ et que $\mathscr{P}(x)$. »

$\vdots$ $\Big\}$ Vérification que x appartient à E et satisfait la propriété $\mathscr{P}$.

Sans le savoir, vous utilisez en réalité depuis toujours le raisonnement par analyse-synthèse. Simplement, vous aurez désormais besoin de comprendre, au moment où vous en faites une, que vous êtes en train d'effectuer une analyse-synthèse.

— Dans l'analyse, on part d'un élément quelconque de E et on montre que s'il satisfait la propriété $\mathscr{P}$, il a forcément telle ou telle tête et non telle autre. En résumé, **DANS L'ANALYSE, ON RESTREINT LE CHAMP DES SOLUTIONS POSSIBLES.**

— Dans la synthèse, on vérifie que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, qu'elles sont bel et bien solutions du problème étudié, i.e. des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

Par exemple, vous faites sans le savoir une analyse-synthèse chaque fois que vous résolvez une équation. On vous l'a dit et répété, la résolution d'une équation est toujours un double mouvement avec réciproque. Tâchons de nous en convaincre sur un exemple de résolution par équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

ANALYSE : Les seules solutions possibles sont $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$. ↓

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 &\iff \left(x^2\right)^2 - 4\left(x^2\right) + 3 = 0 \\ &\iff x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 3 \quad \text{(second degré...)} \\ &\iff x \in \left\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\right\}. \end{aligned}$$

↑ SYNTHÈSE : $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$ sont bel et bien solutions.

Exemple On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.

Démonstration

- **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on choisit pour y la valeur $f(x)$: $f(0) = 2 - x - f(x)$, donc : $f(x) = \big(2 - f(0)\big) - x$. Ce calcul prouve que f est affine de la forme $x \longmapsto \lambda - x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Ce n'était pas clair au départ ! En deux lignes, nous avons à peu près obtenu la tête de f. Cela dit, les fonctions ainsi dénichées sont-elles **TOUTES** solutions ? Il se peut qu'aucune ne le soit en réalité, que certaines seulement le soient, que toutes les soient. La synthèse va faire le tri.

- **Synthèse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction $x \longmapsto \lambda - x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(x - (\lambda - y)\big) = f(x + y - \lambda) = \lambda - (x + y - \lambda) = 2\lambda - x - y.$$
  Ainsi, la seule valeur de λ pour laquelle f satisfait le problème étudié est le réel 1.

Conclusion : la fonction $x \longmapsto 1 - x$ est la seule solution du problème étudié.

Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer les propositions de la forme : $\exists!\, x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$. Montrer une telle proposition, c'est en effet chercher l'ensemble des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$ et montrer qu'il en existe exactement un.

ANALYSE = UNICITÉ
SYNTHÈSE = EXISTENCE

Dans ce cadre, l'analyse réduit le champ des possibles jusqu'à obtention d'une **TÊTE UNIQUE** de l'objet étudié, puis la synthèse vérifie que cette tête unique est bel et bien solution.

Revenons pour finir sur la manière dont on prouve une existence en mathématiques. « On pose $x = \ldots$ », souvenez-vous. L'ennui, c'est qu'il faut avoir à l'avance une idée d'objet x pour vérifier qu'il a la propriété souhaitée. On tourne un peu en rond. Or l'analyse-synthèse est justement une machine à avoir des idées. Dans l'analyse, on prouve l'unicité, mais on le fait sous forme d'enquête policière, et à la fin on connaît la tête du criminel. En montrant l'unicité, on prépare donc la preuve d'existence qui est la synthèse. En résumé, **DANS L'ANALYSE-SYNTHÈSE, L'UNICITÉ EST DÉJÀ UNE MANIÈRE D'ABORDER L'EXISTENCE.**

Exemple On veut montrer que pour toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction continue $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et un unique réel a pour lesquels : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = g(x) + a$.

Démonstration Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue fixée.

- **Analyse :** Soient $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = g(x) + a$. Notre objectif : exprimer g et a en fonction de f.
  Or par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(g(x)+a\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + a\int_0^1 \mathrm{d}x = 0 + a = a$,
  donc nous avons réussi à trouver a : $\displaystyle a = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. A fortiori, g nous est aussi connue.
- **Synthèse :** Posons $\displaystyle a = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et notons g la fonction $x \longmapsto f(x) - a$. Nous devons vérifier que g et a satisfont toutes les hypothèses que nous avons faites dans l'analyse.
  — Pour commencer, g est bien continue sur $[0,1]$.
  — Ensuite, pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = g(x) + a$.
  — Enfin : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(f(x)-a\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - a\int_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - a = 0.$

11 BIEN RÉDIGER AVEC LES FONCTIONS

- **Définir une fonction :** Pour définir une fonction, on peut procéder ainsi :

  Ensemble de définition

  « On note f la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}. \end{array}\right.$ » Ensemble d'arrivée

  Flèche avec un **PETIT TRAIT !**

  ou ainsi : « On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. »
  « On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f(x) = \sqrt{x}$. »
  « On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sqrt{x}$. »

  On s'interdira en revanche scrupuleusement les formulations suivantes :
  « On note f la fonction $\sqrt{n}$ sur $\mathbb{N}$. » « On note f la fonction $n \longrightarrow \sqrt{n}$ sur $\mathbb{N}$. » « On pose $f(n) = \sqrt{n}$. »
  Problème de flèche !

  On prendra également soin de **NE PAS CONFONDRE LES VERBES « POSER » ET « NOTER »**, qui ne s'utilisent pas grammaticalement de la même manière.

- **Parler d'une fonction :** Pour parler d'une fonction, on écrit : « ... la fonction $\boxed{x \longmapsto}\ \sin\big(x^2\big)\ldots$ » et non pas : « ... la fonction $\sin\big(x^2\big)\ldots$ »

  Ensuite, on dit qu'une fonction est définie/monotone/continue/dérivable <u>**SUR**</u> tel ou tel domaine. On s'interdira scrupuleusement toute formulation du type : « La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x} + x + 1$ est définie/monotone/continue/dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. »