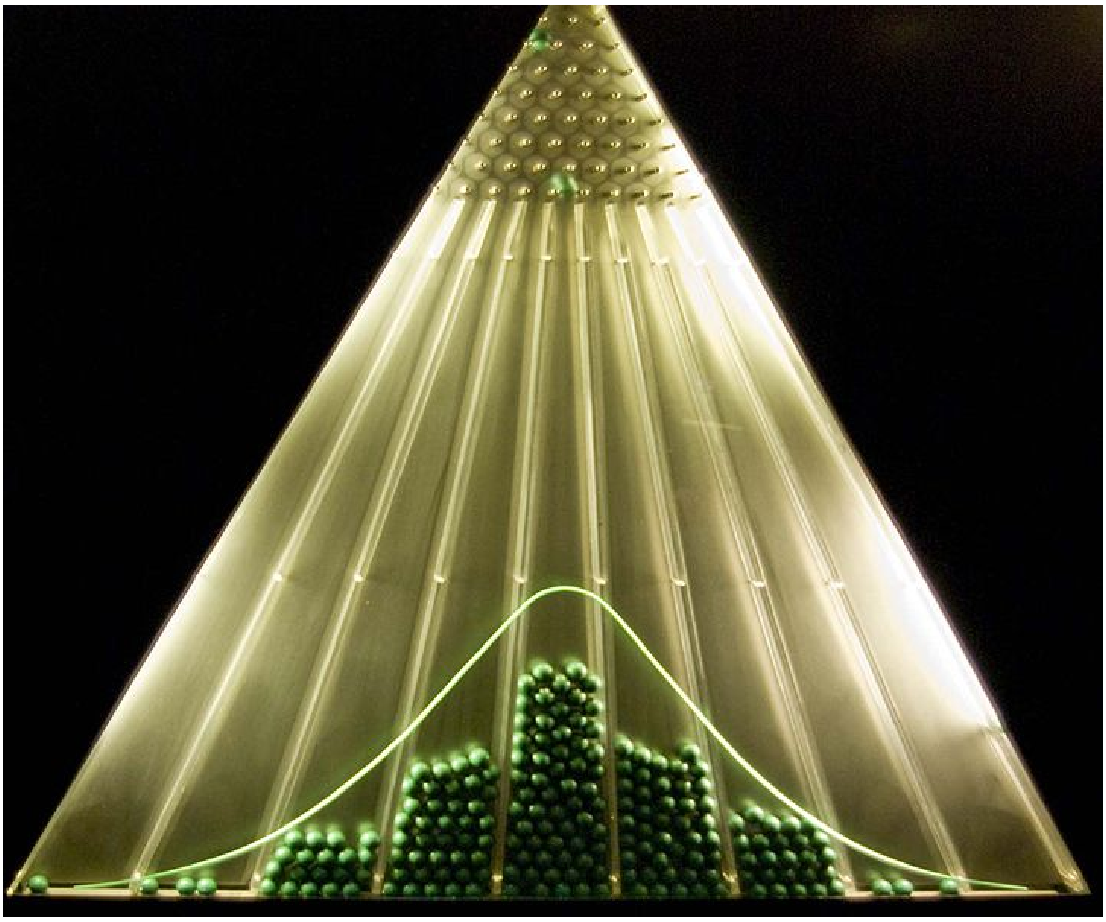
Starter (1^{e} année, semestre 1), 2019-2020

Méthodologie mathématique (Notes de cours)



Yves DUCEL[1]

Mis à jour le 14 novembre 2020

[1]yves.ducel@univ-fcomte.fr

Table des matières.

Chapitre 1

Raisonner en mathématiques

Programme

Propositions logiques et opérations logiques élémentaires : connecteurs logiques ET, OU, NON, IMPLICATION, ÉQUIVALENCE. Vocabulaire associé à une implication (implication contraposée, négation d'une implication, implication réciproque, propriété caractéristique, condition nécessaire et suffisante, expressions "il faut et il suffit", "il faut", "il suffit"). Notions de tautologies et contradictions, tautologies classiques. Vocabulaire usuel mathématique (définition, théorème, proposition mathématiques, corollaire, lemme).
Prédicats et propositions logiques avec quantificateurs : quantificateurs universel et existentiel, négation de propositions avec quantificateurs.
Application à l'étude de différents types de raisonnements mathématiques : raisonnements direct, par exhaustion des cas, au cas par cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence simple, par contre-exemple.

1.1 Propositions et opérations logiques élémentaires

1.1.1 Notions premières

En logique classique,

Définition 1.1.
*Une **proposition (logique)** est un énoncé (une assertion) qui est nécessairement soit **VRAI** (on note V, ou quelquefois 1), soit **FAUX** (on note F, ou quelquefois 0), sans être les deux en même temps et à l'exclusion de tout autre possibilité (**logique du tiers exclu**).*
*On dit que "VRAI" et "FAUX" sont **les valeurs de vérité** de la proposition logique.*

On désigne par des lettres majuscules P, Q, ... les propositions et on utilise parfois les guillemets « ... » pour bien délimiter l'énoncé d'une proposition logique.
La définition précédente n'est pas une définition au sens mathématique. On dira que c'est une notion première basée sur la pratique de ce qu'est un énoncé sans formaliser davantage.

Exemple : « L'entier 6 est un multiple de 2 » prend la valeur VRAI, « $2 \times 3 = 7$ » prend la valeur FAUX

Remarque sur le vocabulaire mathématique :

1. **Une conjecture** est une proposition logique dont on pense qu'elle est vraie mais qu'il faut démontrer ou infirmer.

EXEMPLE : Conjecture de Fermat : « Pour tout entier $n \geq 3$, il n'existe pas de nombres entiers $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$ tels que $x^n + y^n = z^n$ » (VRAIE, démontrée par Andrew Wiles en 1994)

Conjecture sur les nombres de Fermat : « Pour tout entier naturel n, $2^{2^n} - 1$ est un nombre premier » (FAUSSE, infirmée par L. Euler pour $n = 5$).

2. **Un postulat** est ce que le mathématicien demande qu'on lui accorde et qui sert de fondement au reste de son exposé ; il n'est cependant pas par définition interdit de le démontrer plus tard. En ce sens, le postulat se distingue de **l'axiome**, ce dernier étant toujours posé au départ comme un élément fondamental du système qu'on ne cherchera pas à démontrer (axiomes de Peano des entiers naturels ; axiomes de structure de groupe).

   On peut donc utiliser un postulat avec l'assentiment de l'auditeur, qui le prend comme un principe non démontré mais sans doute légitime, car semblant intuitivement non contestable (ou parce que prouvé ultérieurement par des démonstrations ne le faisant pas intervenir). La plupart des postulats sont jugés comme étant des marques de bon sens, des appuis sur l'expérience.

   La géométrie issue d'Euclide était ainsi présentée avec des axiomes, supposés ne pas avoir à être justifiés, et d'un postulat (par un point donné et parallèlement à une droite donnée passe une et une seule droite) qui possiblement aurait pu être démontré à partir de ces axiomes. La découverte de l'indépendance de ce postulat relativement aux autres axiomes amena à considérer trois géométries tranchant par des axiomes distincts ce postulat qui n'est devenu axiome que dans la seule géométrie euclidienne, mais pas dans les géométries non euclidiennes.

3. Dans un cours usuel de mathématique, **une proposition mathématique** (ou de façon plus simple une **proposition**), **un théorème**, **une propriété**, **un lemme**, **un corollaire** sont des propositions logiques qui ont été démontrées vraies dans le cadre d'une théorie mathématique.

   On qualifie souvent de <u>théorème</u> une proposition mathématique qui joue un rôle important dans la théorie développée. De même, on attribuera quelquefois le nom de <u>lemme</u> à une proposition mathématique préliminaire à la démonstration d'une autre proposition mathématique à venir dans l'exposé alors qu'on nommera plutôt <u>corollaire</u> une conséquence d'une proposition mathématique qu'on vient de démontrer.

4. **Une définition** est un énoncé qui permet d'introduire une notation, de fixer une terminologie ou de poser des éléments de langage concernant des objets mathématiques. Une définition n'est pas une proposition logique.

1.1.2 Formules propositionnelles, connecteurs logiques

On peut effectuer des opérations logiques sur les propositions à l'aide de **connecteurs logiques** pour définir de nouvelles propositions qu'on appelle aussi **formules propositionnelles**.

Définition 1.2. Formule propositionnelle
*On appelle **formule propositionnelle**, ou **formule logique**, toute proposition logique construite, à l'aide de **connecteurs logiques**, à partir d'autres propositions P, Q, R, ..., dont la valeur de vérité est complètement déterminée par la connaissance des valeurs de vérité des propositions P, Q, R, ... qui composent la formule.*

Les connecteurs logiques de base sont les suivants :

Définition 1.3. OU, ET, NON
Connecteur binaire "OU" (notation : $\vee$***)*** *(OU inclusif) : Si P et Q sont deux propositions, on note « P OU Q » ou « $P \vee Q$ », la proposition qui est VRAIE dès que l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie, et FAUSSE si P et Q sont toutes les deux fausses.*
On note aussi $P \vee Q$ la proposition « P OU Q ».

Connecteur binaire "ET" (notation : $\wedge$***)*** *: Si P et Q sont deux propositions, on note « P ET Q » ou « $P \wedge Q$ », la proposition qui est VRAIE si P et Q sont toutes les deux vraies, et FAUSSE dès que l'une au moins des deux propositions P et Q est fausse.*
On note aussi $P \wedge Q$ la proposition « P ET Q ».

Connecteur unaire "NON" (notation : $\neg$***)*** *: Si P est une proposition, on note « NON(P) » ou « $\neg P$ », la proposition qui est VRAIE si la proposition P est fausse et qui est FAUSSE si la proposition P est vraie.*
On note aussi $\neg P$ la proposition « NON(P) ».

Exercice : Écrire les tables de vérité de ces formules propositionnelles.

A partir de ces connecteurs on définit d'autres connecteurs logiques. En voici deux très utilisés en mathématiques :

Définition 1.4. Implication logique
Connecteur binaire "Implication logique", (notation : $\Rightarrow$***)*** *: Si P et Q sont deux propositions, on note « $P \Rightarrow Q$ » la proposition « NON(P) OU Q » et on lit "P implique Q".*
Dans « $P \Rightarrow Q$ », la proposition P s'appelle ***la prémisse*** *et la proposition Q s'appelle* ***la conséquence****.*

Définition 1.5. Équivalence logique
Connecteur binaire "Équivalence logique" (notation : $\Leftrightarrow$***)*** *: Si P et Q sont deux propositions, on note « $P \Leftrightarrow Q$ » la proposition « $(P \Rightarrow Q)$ ET $(Q \Rightarrow P)$ » et on lit "P équivalent à Q".*

Remarque :

1. Attention ! Dire que la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie ne signifie pas que les propositions P et Q sont vraies.
   En revanche, dire que la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie signifie que les propositions P et Q ont la même table de vérité, i.e. qu'elles sont toutes les deux vraies en même temps ou qu'elles sont toutes les deux fausses en même temps.
2. Dans une formule propositionnelle F contenant la proposition P, on pourra toujours remplacer cette proposition P par une proposition Q équivalente à P sans changer la valeur de vérité de F.

Remarques sur les énoncés mathématiques liés à ces connecteurs logiques :

1. Usuellement lorsque la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on dit indifféremment *P implique Q*, ou *si P est vraie, alors Q est vraie*, ou *pour que P soit vraie,* ***il faut*** *que Q soit vraie*, ou *Q est une* ***condition nécessaire*** *pour P*, ou *pour que Q soit vraie,* ***il suffit*** *que P soit vraie*, ou *P est une* ***condition suffisante*** *pour Q*.
2. Usuellement lorsque la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on dit indifféremment *les propositions P et Q sont équivalentes*, ou *P équivaut à Q*, ou *P est* ***une condition nécessaire***

et suffisante *pour* Q, ou encore P *est vraie* ***si, et seulement si*** Q *est vraie.*

Définition 1.6.
Une ***tautologie*** *est une formule propositionnelle qui ne prend que la valeur VRAIE, quelles que soient les valeurs de vérités des propositions logiques* P, Q, $\cdots$ *qui la composent.*
Une ***contradiction*** *est une formule propositionnelle qui ne prend que la valeur FAUSSE, quelles que soient les valeurs de vérités des propositions logiques* P, Q, $\cdots$ *qui la composent.*

Exemple : $[\,\neg(\neg P)\,] \Leftrightarrow P\,]$ est une tautologie alors que $[\,(\neg P) \wedge P\,]$ est une contradiction.

La proposition suivante donne des exemples de tautologies fréquemment utilisées dans les raisonnement mathématiques :

Proposition 1.1. Tautologies classiques
Soient P, Q *et* R *des propositions logiques, alors les formules propositionnelles suivantes sont toutes des tautologies*

1. $P \Leftrightarrow P$;
2. $(P \vee P) \Leftrightarrow P$;
3. $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$;
4. $[\,\neg(\neg P)\,] \Leftrightarrow P\,]$;
5. $[\,P \Leftrightarrow Q\,] \Leftrightarrow [\,\neg P \Leftrightarrow \neg Q\,]$;
6. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow [\,(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\,]$ (**distributivité de** $\wedge$ **sur** $\vee$) ;
7. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow [\,(P \vee Q) \wedge (P \vee R)\,]$ (**distributivité de** $\vee$ **sur** $\wedge$) ;
8. $P \vee (\neg P)$ (**principe du tiers exclu**) ;
9. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [\,P \wedge (\neg Q)\,]$;
10. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow [\,(\neg P) \vee (\neg Q)\,]$ (**règle de de Morgan**) ;
11. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow [\,(\neg P) \wedge (\neg Q)\,]$ (**règle de de Morgan**) ;
12. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [\,(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)\,]$ (**contraposition**) ;
13. $[\,(P \Leftrightarrow Q) \;\wedge\; (Q \Leftrightarrow R)\,] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ (**transitivité de l'équivalence**) ;
14. $[\,(P \Rightarrow Q) \;\wedge\; (Q \Rightarrow R)\,] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (**transitivité de l'implication**) ;
15. $[\,P \wedge (P \Rightarrow Q)\,] \Rightarrow Q$ (**modus ponens**) ;
16. $P \Leftrightarrow [\,(\neg P) \Rightarrow [Q \wedge (\neg Q)]\,]$ (**principe de contradiction**).

Remarque : Certaines de ces tautologies sont à la base de diverses formes de raisonnements en mathématiques. Il existe d'autres tautologies qu'on explicitera en cas de besoin.

Exercice : Énoncer ces tautologies en français et les écrire avec les notations ET, OU, NON ; les démontrer en utilisant les tables de vérité.

À partir de l'implication « $P \Rightarrow Q$ », on définit d'autres formules propositionnelles classiques en mathématiques qui lui sont naturellement associées.

Définition 1.7.
Étant donnée une implication « $P \Rightarrow Q$ », on lui associe usuellement les propositions logiques suivantes :
- *l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est alors appelée* ***implication directe****;*
- *l'implication « $(non\, Q) \Rightarrow (non\, P)$ » est appelée* ***implication contraposée de*** *$P \Rightarrow Q$ (qui d'après la définition 1.4 s'écrit aussi « Q ou non P ») ;*
- ***la négation*** *« $non\,(P \Rightarrow Q)$ » (qui, d'après la définition 1.4 et les règles de négation, s'écrit aussi « P et $(non\, Q)$ ») ;*
- *l'implication « $Q \Rightarrow P$ » est appelée* ***implication réciproque de*** *$P \Rightarrow Q$ (qui d'après la définition 1.4 s'écrit aussi « $(non\, Q)$ ou P »).*

Exercice : Écrire les tables de vérité de ces formules propositionnelles.

Remarque : Contrairement à l'implication contraposée et à l'implication réciproque, on notera que la négation « $non\,(P \Rightarrow Q)$ » d'une implication ne s'énonce pas en terme d'implication.

Remarque : Dans la rédaction d'un texte mathématique en français on veillera à ne jamais utiliser les symboles logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ comme des abréviations. Ces symboles ne doivent être utilisés que dans l'écriture de formules logiques.

Notation : Pour faciliter la compréhension on utilisera, plutôt en TD, les notations "ET", "OU" et "NON" pour ces connecteurs ; on les écrira quelquefois en majuscule pour les distinguer des expressions correspondantes de la langue française lorsqu'on voudra dissiper toute ambiguïté dans une phrase.

1.2 Prédicats et quantificateurs

On suppose connus le vocabulaire et les notations usuelles de la théorie élémentaire des ensembles.

Définition 1.8.
Soit E un ensemble, on appellera ***prédicat à une variable défini sur*** *E une proposition logique, qui dépend d'une variable x élément de E, dont la valeur de vérité dépendra des valeurs prises par la variable x.*
On le notera alors $P(x)$ pour faire apparaître la variables x.

On définit de même des prédicats à 2, 3, ... n variables. On raisonnera essentiellement sur des prédicats à une variable.

Exemple : Voici des exemples de prédicat : si $E = \mathbb{N}$ et, pour tout entier $x \in \mathbb{N}$, on note $P(x)$ la proposition logique « x est un entier pair » : $P(3)$ est faux mais $P(4)$ est vraie.

Si E est un ensemble quelconque et, pour tout entier $x \in E$, on note $P(x)$ la proposition logique « $x \neq x$ » : $P(x)$ est faux pour tout $x \in E$.

Définition 1.9. Quantificateurs
Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat à une variable x défini sur E.

1. *On définit alors une proposition logique notée « $\forall x \in E, P(x)$ » qui prend la valeur VRAI si la proposition logique $P(x)$ est vraie pour chacun des éléments de E et qui est fausse dès qu'il existe une élément x de E pour lequel $P(x)$ est fausse.*
   La proposition logique « $\forall x \in E, P(x)$ » se lit "Pour tout $x \in E$, $P(x)$ est vraie" ou "Quel que soit $x \in E$, $P(x)$ est vraie".
2. *On définit alors une proposition logique notée « $\exists x \in E, P(x)$ » qui prend la valeur VRAI si la proposition logique $P(x)$ est vraie pour au moins un des éléments x de E et qui est fausse si la proposition $P(x)$ est fausse pour chaque élément x de E.*
   La proposition logique « $\exists x \in E, P(x)$ » se lit "Il existe au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie".

Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur universel*** *et le symbole $\exists$ est appelé* ***quantificateur existentiel****.*

Convention : Si $E = \emptyset$, on attribue la valeur VRAI à la proposition logique « $\forall x \in E, P(x)$ » et la valeur FAUX à la proposition « $\exists x \in E, P(x)$ ».

Remarque 1 : On écrit souvent « $\exists x \in E \ / \ P(x)$ » au lieu de « $\exists x \in E, P(x)$ ».

Remarque 2 : On peut donner une interprétation ensembliste des propositions « $\forall x \in E, P(x)$ » et « $\exists x \in E, P(x)$ ».
En effet, notons $E_P = \{x \in E \ / \ P(x) \text{ vraie}\}$. On a alors les deux équivalences logiques

$$[\,\forall x \in E, P(x)\,] \Leftrightarrow (E_P = E) \quad \text{et} \quad [\,\exists x \in E, P(x)\,] \Leftrightarrow (E_P \neq \emptyset).$$

Exemple : Prendre $E = \mathbb{R}$ avec les prédicats $P(x)$: « $x > 0$ » et $Q(x)$: « $x < 0$ ». Dans ce cas, les deux propositions « $\forall x \in E, P(x)$ » et « $\forall x \in E, Q(x)$ » sont fausses. De plus, $E_P =]0, +\infty[$ et $E_Q =]-\infty, 0[$.

Proposition 1.2.
Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat à une variable x défini sur E. La formule propositionnelle suivante est toujours vraie :

$$\neg[\,\forall x \in E, P(x)\,] \ \Leftrightarrow \ [\,\exists x \in E, \neg(P(x))\,].$$

La négation de la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est la proposition « $\exists x \in E, \neg(P(x))$ ».
La négation de la proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est la proposition « $\forall x \in E, \neg(P(x))$ ».

Remarque :

1. On notera bien que les propositions « $\forall x \in E, P(x)$ » et « $\exists x \in E, P(x)$ » ne sont pas des prédicats car elles ne dépendent pas de x. On dit que la variable x qui apparaît dans les écritures est une **variable muette**. On pourrait très bien écrire « $\forall y \in E, P(y)$ » et « $\exists z \in E, P(z)$ » sans que cela change le sens de la proposition.
   En effet, si $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$, la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est la proposition « $P(e_1) \wedge P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge P(e_3) \wedge \cdots \wedge P(e_N)$ », et la proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est la proposition « $P(e_1) \vee P(e_1) \vee P(e_2) \vee P(e_3) \vee \cdots \vee P(e_N)$ ».
2. En revanche, si E et F sont deux ensembles et $P(x, y)$ est un prédicat à deux variables x définie sur E et y définie sur F, on notera que, par exemple, « $\forall y \in F, P(x, y)$ » est un prédicat à une variable x définie sur E. La variable y est ici muette alors que la variable x ne l'est pas. On dit alors que la variable x est **libre** (sous-entendu d'évoluer dans E).

3. Lorsqu'on veut remplacer une lettre muette par une autre lettre dans une formule propositionnelle, on fera attention à ne pas utiliser une lettre déjà utilisée dans la formule.

4. Si on a un prédicat $P(x,y)$ à deux variables, on prendra garde que « $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y)$ » et « $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)$ » sont deux propositions logiques différentes (voir les exercices).

Proposition 1.3.
Soit E un ensemble, $Q(x)$ et $P(x)$ deux prédicats à une variable x défini sur E.
Les formules propositionnelles suivantes sont toujours vraies :
1. $[\forall x \in E, (P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))]$;
2. $[\exists x \in E, (P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [(\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))]$;
3. $[(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))] \Rightarrow [\forall x \in E, (P(x) \vee Q(x)]$;
4. $[\exists x \in E, (P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))]$.

On peut donner une interprétation ensembliste de ces résultats de la façon suivante :

Proposition 1.4.
Soit E un ensemble, $Q(x)$ et $P(x)$ deux prédicats à une variable x défini sur E. Notons $E_P = \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie}\}$, $E_Q = \{x \in E \mid Q(x) \text{ vraie}\}$, $E_{P\vee Q} = \{x \in E \mid (P(x) \vee Q(x)) \text{ vraie}\}$ *et* $E_{P\wedge Q} = \{x \in E \mid (P(x) \wedge Q(x)) \text{ vraie}\}$.
Alors

$$E_{P\wedge Q} = E_P \cap E_Q \quad \text{et} \quad E_{P\vee Q} = E_P \cup E_Q.$$

De plus, les résultats de la proposition 1.3 précédente s'écrivent item par item :
1. $[E_{P\wedge Q} = E] \Leftrightarrow [E_P = E \text{ et } E_Q = E]$;
2. $[E_{P\wedge Q} \neq \emptyset] \Rightarrow [E_P \neq \emptyset \text{ et } E_Q \neq \emptyset]$;
3. $[E_P = E \text{ ou } E_Q = E] \Rightarrow [E_{P\vee Q} = E]$;
4. $[E_{P\vee Q} \neq \emptyset] \Leftrightarrow [E_P \neq \emptyset \text{ ou } E_Q \neq \emptyset]$.

Contre-exemple : La réciproque de l'item 2), c'est-à-dire l'implication

$$[(\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))] \Rightarrow [\exists x \in E, (P(x) \wedge Q(x)],$$

est fausse comme le montre le contre-exemple où $E = \mathbb{R}$ avec les prédicats $P(x)$: « $x > 0$ » et $Q(x)$: « $x < 0$ ». Alors $E_P =]0, +\infty[$ et $E_Q =]-\infty, 0[$. D'où $E_{P\wedge Q} = \emptyset$ mais $E_P \neq \emptyset$ et $E_Q \neq \emptyset$, ce qui implique que la proposition ($E_P \neq \emptyset$ et $E_Q \neq \emptyset$) est vraie.

Contre-exemple : La réciproque de l'item 3), c'est-à-dire l'implication

$$[\forall x \in E, (P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))],$$

est fausse comme le montre le contre-exemple où $E = \mathbb{R}$ avec les prédicats $P(x)$: « $x \geq 0$ » et $Q(x)$: « $x < 0$ ». Alors $E_P = [0, +\infty[$ et $E_Q =]-\infty, 0[$. D'où $E_{P\vee Q} = \mathbb{R}$, mais $E_P \neq \mathbb{R}$ et $E_Q \neq \mathbb{R}$, ce qui implique que la proposition ($E_P = \mathbb{R}$ ou $E_Q = \mathbb{R}$) est fausse.

Pour des prédicats à deux variables, on peut échanger la place les quantificateurs, $\forall$ ou $\exists$, sous réserve de prendre quelques précautions :

Proposition 1.5.
Soit E et F deux ensembles, $P(x,y)$ un prédicat à deux variables x définie sur E et y définie sur F.
Les formules propositionnelles suivantes sont toujours vraies :
1. $[\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)] \Leftrightarrow [\forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y)]$;
2. $[\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)] \Leftrightarrow [\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y)]$;
3. $[\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)] \Rightarrow [\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)]$.

Remarque : La réciproque de l'item 3), c'est-à-dire l'implication

$$[\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)] \Rightarrow [\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)],$$

est fausse comme le montre le contre-exemple où $E = F = \mathbb{R}$ et $P(x,y)$ est le prédicat « $x \leq y$ ».

1.3 Différents types de raisonnements mathématiques

Les tautologies sont à la base de raisonnements mathématiques. On en donne dans ce paragraphe quelques exemples classiques.

1.3.1 Raisonnement direct

Définition 1.10.
Pour toutes propositions logiques P et Q, on note $P \Rightarrow Q$ la proposition « non P ou Q ».
La proposition $P \Rightarrow Q$ s'appelle ***une implication (logique)*** *et se lit « P implique Q » ou encore « Si P, alors Q ».*

Méthodologie du raisonnement direct : On veut montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie. Deux cas se présentent :
- soit la proposition P est fausse, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie ;
- soit la proposition P est vraie, on doit alors montrer que la proposition Q est vraie. Ce qui prouvera que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Compte tenu que si P est fausse, l'implication $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie dans ce cas, pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, seul l'item 2) est à étudier.
Lorsqu'on suppose que la proposition P est vraie et qu'on montre qu'alors la proposition Q est également vraie, on dit qu'on a démontré l'implication $P \Rightarrow Q$ par **un raisonnement direct** par opposition à d'autres types de raisonnement qu'on verra plus loin. □

Exemple : Montrer que si a et b sont des nombres rationnels, alors $a+b$ est un nombre rationnel.
Ici P est la proposition « a et b sont des rationnels » et Q est la proposition « $a+b$ est un rationnel. ». On veut prouver l'implication $P \Rightarrow Q$.
Rappelons qu'on appelle nombre rationnel tout nombre réel x tel qu'il existe un entier relatif p_x et un entier naturel non nul q_x pour lequel $x = \frac{p_x}{q_x}$. Comme P est supposée vraie, a est un nombre rationnel, donc il existe un entier relatif p_a et un entier naturel non nul q_a pour lequel $a = \frac{p_a}{q_a}$. De même, b est un nombre rationnel, donc il existe un entier relatif p_b et un entier naturel non nul q_b pour lequel $b = \frac{p_b}{q_b}$.
Par suite, la somme $a+b$ peut s'écrire

$$a + b = \frac{p_a}{q_a} + \frac{p_b}{q_b} = \frac{p_a q_b + q_a p_b}{q_a\, q_b},$$

où $p_a q_b + q_a p_b$ est un entier relatif car les produits et sommes d'entiers relatifs sont des entiers relatifs, et $q_a q_b$ est un entier naturel non nul car le produit de deux entiers naturels non nuls est un entier naturel non nul.
Conclusion : En vertu de la définition d'un nombre rationnel rappelée ci-dessus, on en conclut que la somme $a + b$ est bien un nombre rationnel ; ce qui prouve que la proposition Q est vraie, et par suite que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie. $\square$

1.3.2 Raisonnements par exhaustion de cas

Raisonnement au cas par cas

Proposition 1.6.
Soit E un ensemble fini de cardinal $N \geq 1$ et, pour tout $x \in E$, une proposition logique $P(x)$. On a l'équivalence logique :

$$[\,\forall x \in E, P(x)\,] \;\Leftrightarrow\; [\,P(x_1) \text{ et } P(x_2) \text{ et } \cdots \text{ et } P(x_N)\,]\,.$$

Le théorème 1.6 est à la base du **raisonnement au cas par cas**.

Méthodologie du raisonnement au cas par cas
Pour montrer que, pour tout $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie,

1. on identifie l'ensemble E et la proposition $P(x)$ à établir pour tout $x \in E$;
2. on démontre pour chacun des éléments x_k de E (avec $k = 1, 2, \cdots, N$) que la proposition $P(x_k)$ est vraie ;
3. on conclut en vertu de l'équivalence du théorème 1.6 que, pour tout $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie. $\square$

Remarque : Dans la pratique, lorsque N est très grand, ce type de raisonnement peut être vite fastidieux. Dans ce cas on fait une étude pour ramener l'exhaustion des cas sur un ensemble E de cardinal bien plus petit de façon à limiter le nombre de cas à étudier.
Les méthodes algorithmique et les outils de calcul scientifique sont souvent utilisés dans ce type de démonstration.

Exemple (La recette de Kaprekar, cf. [Math'x (Term. S), Spéc. Maths], page 29) : Considérons l'algorithme suivant : « Prendre un entier qui s'écrit en base DIX avec trois chiffres deux à deux distincts. Considérer le plus grand et le plus petit nombre qu'on peut écrire avec ces trois chiffres. Retrancher le plus petit du plus grand. Puis appliquer les instructions précédentes à la différence obtenue ».
Montrer qu'au-delà de la cinquième itération cet algorithme renvoie toujours 495, quel que soit le nombre initialement choisi.
Première approche : On utilise un raisonnement exhaustif au cas par cas, en effectuant l'algorithme pour chacun des $10 \times 9 \times 8 = 720$ entiers qui s'écrivent en base DIX avec trois chiffres deux à deux distincts. Si cette méthode est très fastidieuse à la main, elle se programme sans trop de peine avec un outil de calcul scientifique.
Seconde approche : Si on ne veut pas (ou ne peut pas) utiliser d'outil de calcul scientifique, on peut rendre le calcul plus accessible à la main en remarquant que, dans la première étape, le plus grand nombre s'écrit $\overline{cdu}$ en base DIX où les chiffres c, d et u vérifient les inégalités $0 \leq u < d < c \leq 9$. Le plus petit qu'on peut écrire est alors $\overline{udc}$ et leur différence vaut $\overline{cdu} - \overline{udc} = 99\,(c - u)$. Compte

tenu des conditions sur les chiffres c, u et d, on obtient que $c-u$ ne peut prendre que les valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9. À l'issue de la première itération la différence obtenue est donc parmi les huit entiers 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 ou 891.
On a donc ramené l'étude exhaustive des 720 cas à celle de ces 8 cas seulement. On peut alors vérifier assez facilement, par un raisonnement au cas par cas, que pour chacun de ces huit entiers l'algorithme renvoie à un des éléments de la chaîne d'entiers

$$891 \to 792 \to 693 \to 594 \to 495\ ;$$

ce qui donne bien 495 au plus tard à la cinquième itération. Au-delà de la cinquième itération, l'algorithme renvoie toujours la valeur 495. □

Raisonnement par disjonction de cas

Proposition 1.7.
Soit E un ensemble non vide, n un entier naturel non nul et, pour tout $x \in E$, une proposition logique $P(x)$.
Si $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont des sous-ensembles non vides de E tels que $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = E$, alors on a l'équivalence logique :

$$[\forall x \in E, P(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E_1, P(x)) \text{ et } (\forall x \in E_2, P(x)) \text{ et } \cdots \text{ et } (\forall x \in E_n, P(x))].$$

Le théorème 1.7 est à la base du **raisonnement par disjonction de cas**.

Remarques : Dans la pratique, la suite $E_1, E_2, \cdots, E_n$ constitue souvent une partition de E.
Le raisonnement par disjonction de cas est un raisonnement au cas par cas où on a regroupé chaque cas à étudier dans différents paquets E_1, E_2, ... qu'on étudie en blocs chacun séparément.

Méthodologie du raisonnement par disjonction de cas
Pour montrer que, pour tout $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie,

1. on identifie l'ensemble E et la proposition $P(x)$ à établir pour tout $x \in E$;
2. on construit une partition $E_1, E_2, \cdots, E_n$ de l'ensemble E ;
3. on démontre pour chacun des indices k (avec $k = 1, 2, \cdots, n$) que, pour tout $x \in E_k$, la proposition $P(x)$ est vraie ;
4. on conclut en vertu de l'équivalence du théorème 1.7 que, pour tout $x \in E$, la proposition $P(x)$ est vraie. □

Exemple : Montrons par disjonction des cas que, pour tout entier relatif x, $\frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.
Ici $E = \mathbb{Z}$ et, pour tout $x \in E$, considérons la proposition logique $P(x)$: « $\frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$ ». Notons E_1 (resp. E_2) le sous-ensemble des entiers relatifs pairs (resp. impairs).
Soit x un entier relatif. Il n'y a que deux cas possibles qui s'excluent mutuellement : x est pair ou x est impair car les sous-ensembles E_1 et E_2 forment une partition de l'ensemble $E = \mathbb{Z}$.

1. <u>Premier cas</u> : x est pair. Alors il existe un entier relatif k tel que $x = 2k$ et $\frac{x(x+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$ donc, pour tout entier $x \in E_1$, $\frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$; i.e. $\forall x \in E_1, P(x)$ est vraie.
2. <u>Deuxième cas</u> : x est impair. Alors il existe un entier relatif k tel que $x = 2k+1$ et $\frac{x(x+1)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{Z}$ donc, pour tout entier $x \in E_2$, $\frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$; i.e. $\forall x \in E_2, P(x)$ est vraie.

Conclusion : En vertu de l'équivalence du théorème 1.7 on peut donc conclure que, pour tout entier relatif x, le nombre $\frac{x(x+1)}{2}$ est un entier relatif.

1.3.3 Raisonnement par contraposition

Proposition 1.8.
Pour toutes propositions logiques P et Q, on a l'équivalence logique :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\, Q \Rightarrow non\, P)\,.$$

L'implication $non\, Q \Rightarrow non\, P$ est appelée **l'implication contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$. La tautologie du théorème 1.8 est à la base du **raisonnement par contraposition**.

Remarque : ATTENTION ! Quand on se réfère à une implication « $P \Rightarrow Q$ », il ne faut pas confondre, son implication contraposée, sa négation et son implication réciproque :

- l'implication contraposée est l'implication « $non\, Q \Rightarrow non\, P$ », qui d'après la définition 1.10 s'écrit aussi « Q *ou* $non\, P$ » ;
- la négation « $non\,(P \Rightarrow Q)$ » qui s'écrit par définition « P *et* $non\, Q$ », et ne s'énonce pas en terme d'implication ;
- l'implication réciproque est l'implication « $Q \Rightarrow P$ », qui d'après la définition 1.10 s'écrit aussi « $non\, Q$ *ou* P ».

Méthodologie du raisonnement par contraposition
On veut prouver la vérité de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ». Pour cela on montre que l'implication contraposée « $non\, Q \Rightarrow non\, P$ » est vraie.
On conclut par l'équivalence donnée par le théorème 1.8.

Remarque : Un raisonnement par contraposition sur l'implication « $P \Rightarrow Q$ » n'est rien d'autre qu'un raisonnement direct sur l'implication contraposée « $non\, Q \Rightarrow non\, P$ ».

Exemple : Montrons, pour tout entier naturel p, que si p^2 est un nombre pair, alors p est lui-même un nombre pair.
Soit p un entier naturel. Considérons les deux propositions logiques P « L'entier p^2 est pair » et Q « L'entier p est pair ». Le résultat cherché revient à prouver l'implication $P \Rightarrow Q$.
Montrons que l'implication contraposée « $non\, Q \Rightarrow non\, P$ » est vraie, où $non\, P$ est la proposition « L'entier p^2 est impair » et $non\, Q$ est la proposition « L'entier p est impair ».
Si $non\, Q$ est vraie, alors p s'écrit sous la forme $p = 2k + 1$ où k est un entier naturel. Par suite

$$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2K + 1,$$

où on a posé $K = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. L'entier p^2 est donc un nombre impair, ce qui prouve que la proposition $non\, P$ est vraie.
Conclusion : On conclut que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie en vertu de l'équivalence du théorème 1.8. $\square$

1.3.4 Raisonnement par l'absurde

Proposition 1.9. Principe du tiers exclu
Pour toute proposition logique P, la proposition « P ou non P » est vraie.

Proposition 1.10.
Pour toutes propositions logiques P et A, on a l'équivalence logique :

$$P \Leftrightarrow (\text{non}\, P \Rightarrow [A \text{ et non}\, A])\,.$$

La tautologie du théorème 1.10 est à la base du **raisonnement par l'absurde**. Le raisonnement par l'absurde est fondé sur le principe du tiers exclu qui a pour corollaire que, pour toute proposition logique P, la proposition « P et *non* P » est fausse.

Méthodologie du raisonnement par l'absurde
On veut prouver la vérité d'une proposition logique P. Pour cela on suppose que la proposition *non* P est vraie et on montre qu'alors on peut trouver une proposition logique A telle que les deux propositions A et *non* A soient simultanément vraies. Ce qui prouvera que l'implication « *non* $P \Rightarrow [A$ et *non* $A]$ » est vraie.
On conclut alors par l'équivalence donnée par le théorème 1.10.

Exemple : Montrons que la proposition P « Il n'existe pas de couple d'entiers naturels (p, q) avec $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$ vérifiant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ » est vraie.
Supposons la proposition P fausse, c'est-à-dire que la proposition *non* P « il existe un couple d'entiers naturels (p, q) avec $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$ vérifiant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ » est vraie.
En élevant au carré la dernière relation, on obtient $2\,q^2 = p^2$, ce qui signifie que l'entier naturel p^2 est un nombre pair. Par suite, l'entier p est nécessairement un nombre pair, car le carré de tout entier impair est un entier impair (raisonnement par contraposition). On en déduit donc qu'il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$. On peut donc écrire $2\,q^2 = 4\,k^2$, ce qui implique que q^2 est un entier pair, et par suite q est lui aussi un entier pair. On en conclut donc que $\text{pgcd}(p, q) \geq 2$, c'est-à-dire que $\text{pgcd}(p, q) \neq 1$.
Conclusion : En résumé, si on considère la proposition logique A « $\text{pgcd}(p, q) = 1$ », on a donc montré que l'implication *non* $P \Rightarrow [A$ et *non* $A]$ est vraie, ce qui prouve que la proposition P est elle-même vraie. □

Remarque : Si on souhaite démontrer par l'absurde que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose donc qu'elle est fausse, c'est-à-dire que sa négation « P *et non* Q » est vraie. En général, on est alors conduit à prouver que « *non* P » est vraie, ce qui aboutit à ce que la proposition « P *et non* P » est vraie, d'où la contradiction.
On voit donc, qu'en pratique, démontrer par l'absurde que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie revient essentiellement à prouver la contraposée « *non* $Q \Rightarrow$ *non* P » est vraie. Dans ce cas, le raisonnement par l'absurde n'est qu'une version déguisée du raisonnement par contraposition.

1.3.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Soit E un ensemble non vide et, pour tout $x \in E$, une proposition logique $P(x)$. Certains problèmes mathématiques reviennent formellement à identifier le sous-ensemble $E_{\mathcal{P}}$ des éléments $x \in E$ tels que la proposition $P(x)$ est vraie. On dit alors que l'élément x de E possède la **propriété** $\mathcal{P}$

« La proposition $P(x)$ est vraie ».

Le raisonnement par analyse-synthèse est un raisonnement assez général qui s'utilise souvent dans la recherche d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété $\mathcal{P}$, quand on a a priori peu d'informations sur ces éléments.

MÉTHODOLOGIE DU RAISONNEMENT PAR ANALYSE-SYNTHÈSE

1. On cherche les conditions nécessaires que doivent vérifier les éléments x de E satisfaisant la propriété $\mathcal{P}$. Formellement, cela revient donc à montrer que le sous-ensemble $E_{\mathcal{P}}$ cherché est inclus dans un certain sous-ensemble F de E. On cherche à obtenir le plus de conditions nécessaires de façon à bien préciser l'ensemble F. Cette partie du raisonnement s'appelle **l'analyse**.
2. On s'assure ensuite que les éléments satisfaisant les conditions nécessaires obtenues dans la partie analyse vérifient bien la propriété $\mathcal{P}$ voulue. Formellement cela revient à s'assurer que, réciproquement, le sous-ensemble F est inclus dans le sous-ensemble $E_{\mathcal{P}}$ cherché. Cette partie du raisonnement s'appelle **la synthèse**.
3. Conclusion : En résumé, on aura montré l'égalité ensembliste $E_{\mathcal{P}} = F$ qui permet ainsi d'identifier le sous-ensemble $E_{\mathcal{P}}$ des éléments $x \in E$ tels que la proposition $P(x)$ est vraie. $\square$

EXEMPLE 1 : Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée. Montrons qu'il existe un unique couple (f, g) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'application f soit une fonction paire, l'application g est une fonction impaire et, pour tout réel x, on puisse écrire $h(x) = f(x) + g(x)$. Raisonnons par analyse-synthèse.
Ici, E est l'ensemble des couples (f, g) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple (f, g), on considère la proposition logique $P[(f, g)]$ « L'application f est une fonction paire, l'application g est une fonction impaire et, pour tout réel x, on peut écrire $h(x) = f(x) + g(x)$ ».
Le problème posé revient à montrer que le sous-ensemble $E_{\mathcal{P}}$ de tous les éléments (f, g) de E qui possède la propriété $\mathcal{P}$ « La proposition $P[(f, g)]$ est vraie » est réduit à un seul élément.

1. Analyse : On suppose qu'un tel couple de fonctions (f, g) existe. Alors, nécessairement, pour tout réel x, on aura $h(x) = f(x) + g(x)$ et $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$
   En résolvant le système, on obtient les uniques possibilités pour $f(x)$ et $g(x)$:
   $$f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$
   On obtient donc que nécessairement le sous ensemble $E_{\mathcal{P}}$ ne peut contenir que le couple (f_h, g_h) où f_h et g_h désignent les fonctions $f_h : x \in \mathbb{R} \mapsto f_h(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $g_h : x \in \mathbb{R} \mapsto g_h(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$.
2. Synthèse : Il reste à vérifier que les fonctions f_h et g_h vérifient bien les trois conditions imposées : f paire, g impaire et on peut écrire $h = f + g$; ce qui ne présente aucune difficulté.
3. Conclusion : On a ainsi trouvé un unique couple (f_h, g_h) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'application f_h est une fonction paire, l'application g_h est une fonction impaire et $h = f_h + g_h$. $\square$

EXEMPLE 2 : On considère la suite réelle $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt[5]{3\,u_n}$. On aimerait prouver qu'elle est majorée. Raisonnons par analyse-synthèse.

1. Analyse : Supposons que la suite réelle $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit majorée et qu'il existe un majorant M plus petit que tous les autres. Alors, nécessairement, pour tout entier naturel n, on aura $u_n \leq M$, et en particulier $u_0 = 1 \leq M$. Par suite, compte tenu de la croissance de la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt[5]{3\,x}$, on obtient, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt[5]{3\,u_n} \leq \sqrt[5]{3\,M}.$$

   De plus, $u_0 = 1 \leq \sqrt[5]{3\,M}$. Le réel $\sqrt[5]{3\,M}$ est donc un majorant de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$, mais comme M est le plus petit majorant de la suite, le réel M est solution non nulle de l'inéquation $M \leq \sqrt[5]{3\,M}$. Après résolution, on obtient $M \leq \sqrt[4]{3}$. D'où l'idée de chercher à prouver que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est majorée par $\sqrt[4]{3}$.

2. Synthèse : Il reste à vérifier que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bien majorée par $\sqrt[4]{3}$, ce qui peut être démontré à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

3. Conclusion : On a ainsi obtenu que la suite réelle $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est majorée par $\sqrt[4]{3}$. □

1.3.6 Raisonnement par contre-exemple

Proposition 1.11.
Soit E un ensemble non vide et, pour tout $x \in E$, une proposition logique $P(x)$. On a l'équivalence logique :

$$\text{non}\,[\,\forall x \in E, P(x)\,] \;\Leftrightarrow\; [\,\exists x \in E, \text{non}\,P(x)\,]\,.$$

Le théorème 1.11 est à la base du **raisonnement par contre-exemple**.

Méthodologie du raisonnement par contre-exemple

La recherche d'un contre-exemple est une méthode utilisée pour prouver que certaines affirmations, prétendant à un caractère de généralité (c'est-à-dire les propositions universelles), sont fausses. Quand un énoncé commence par « Pour tout ... », il suffit, pour prouver qu'il est faux, de trouver un élément qui réalise les conditions imposées dans l'hypothèse sans que soit vérifiée la conclusion. La mise en évidence de cet élément constitue **un contre-exemple**. □

Exemple : Fermat (1607 ?-1665) conjectura que tous les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, où n est un entier naturel quelconque, appelés **nombres de Fermat** sont des nombres premiers, car il avait constaté que les nombres F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 le sont ; c'est-à-dire que la proposition $[\,\forall n \in \mathbb{N}, P(n)\,]$ était vraie où, pour tout entier naturel n, $P(n)$ désigne la proposition « Le nombre de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ est un nombre premier ».

Euler (1707-1783) prouva que cette conjecture était fausse en exhibant le contre-exemple du cinquième nombre de Fermat, $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$, qui n'est donc pas un nombre premier ; ce qui prouve que la proposition $[\,\exists n \in \mathbb{N}, \text{non}\,P(n)\,]$ est vraie et, par suite, que la proposition $P(5)$ est fausse.

Conclusion : On en conclut alors, par l'équivalence du théorème 1.11 que la proposition $[\,\forall n \in \mathbb{N}, P(n)\,]$ est fausse. La conjecture émise par Fermat est donc fausse. □

1.3.7 Raisonnement par récurrence

Proposition 1.12.
Théorème de récurrence simple
Soit n_0 un entier naturel donné et, pour tout entier n tel que $n \geq n_0$, un prédicat $P(n)$ donné dépendant de l'entier naturel n.
Si les deux conditions suivantes sont réalisées

1. *la proposition $P(n_0)$ est vraie ;*
2. *pour tout entier naturel k tel que $k \geq n_0$, l'implication « $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ » est vraie ;*

alors, pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Remarques :

1. Dans le théorème de récurrence, la condition 1) s'appelle **l'initialisation de la récurrence en n_0** et la condition 2) s'appelle **la propriété d'hérédité du prédicat $P(n)$ à partir de l'entier n_0**.
2. Le théorème de récurrence simple peut s'écrire sous la forme de la proposition logique toujours vraie :
$$\{\, P(n_0) \;\text{ et }\; \forall k \in \mathbb{N}\,[\,(\, k \geq n_0 \,\text{et}\, P(k)\,) \Rightarrow P(k+1)\,]\} \;\Rightarrow\; \{\,\forall n \in \mathbb{N}\,[\, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)\,]\,\}\,.$$
3. En fait, démontrer l'hérédité à partir du rang 0 revient à démontrer que la chaîne infinie des implications ci-dessous est vraie :
$$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P(k) \Rightarrow P(k{+}1) \Rightarrow P(k{+}2) \Rightarrow P(k{+}3) \Rightarrow \cdots$$

Méthodologie du raisonnement par récurrence

1. ***Détermination de n_0 et énoncé du prédicat*** $P(n)$: On précise l'entier n_0 et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, on explicite le prédicat $P(n)$.
2. ***Initialisation*** : On initialise la récurrence en n_0, c'est-à-dire qu'on vérifie que la proposition $P(n_0)$ est vraie.
3. ***Hérédité*** : On prouve l'hérédité du prédicat $P(n)$ à partir de n_0.
   Pour cela on considère un entier naturel k tel que $k \geq n_0$. Deux cas se présentent :
   - soit la proposition $P(k)$ est fausse, alors l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie ;
   - soit la proposition $P(k)$ est vraie, on montre alors que la proposition $P(k+1)$ est également vraie. Ce qui prouve que l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est encore vraie dans ce cas.

   On énonce la conclusion sur l'hérédité : pour tout entier naturel k tel que $k \geq n_0$, l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie.
4. ***Conclusion générale*** : On termine en énonçant la conclusion de la démonstration : en vertu du théorème de récurrence, pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Remarque : Dans la démonstration de l'hérédité on omet souvent de préciser le cas où la proposition $P(k)$ est supposée fausse, car alors l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est automatiquement vraie.
La démonstration s'introduit alors souvent de la manière suivante : « Considérons un entier naturel k tel que $k \geq n_0$ et tel que la proposition $P(k)$ soit vraie, montrons alors que la proposition $P(k{+}1)$ est vraie ».

L'hypothèse $P(k)$ alors introduite dans la démonstration de l'hérédité s'appelle **l'hypothèse de récurrence au rang** k.

Exemple : Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n et pour tout réel $a > 0$, on a $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$.

1. ***Détermination de*** n_0 ***et énoncé du prédicat*** $P(n)$: Ici $n_0 = 0$ et, pour tout entier n tel que $n \geq n_0 = 0$
   La proposition $P(n)$ est l'énoncé : « Pour tout réel $a > 0$, on a $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$ ».
2. ***Initialisation*** : On vérifie que la proposition $P(0)$ est vraie. En effet, pour tout réel $a > 0$, on a
   $$(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0\,a.$$
3. ***Hérédité*** : On prouve l'hérédité de la proposition $P(n)$ à partir de 0.
   Considérons un entier $k \geq 0$ tel que la proposition $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire que, pour tout réel $a > 0$, on a $(1+a)^k \geq 1 + k\,a$. On peut alors écrire, pour tout réel $a > 0$:
   $$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+k\,a)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a,$$
   car $(1+a) \geq 0$, ce qui ne change pas le sens de la première inégalité par multiplication par $(1+a)$ des deux membres de l'inégalité $(1+a)^k \geq 1 + k\,a$, et $ka^2 \geq 0$, ce qui permet d'obtenir la dernière minoration.
   On a donc montré que, pour tout entier naturel k, l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie.
4. ***Conclusion générale*** : En vertu du théorème de récurrence, pour tout entier naturel n, la proposition $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que, pour tout entier naturel n et pour tout réel $a > 0$, on a $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$. □

Remarque 1 : Il est important de vérifier, à la fois, l'initialisation de la récurrence et la propriété d'hérédité du prédicat $P(n)$ pour pouvoir appliquer le théorème de récurrence.
Par exemple, considérons, pour tout entier naturel n, le prédicat $P(n)$: « 2^n est un multiple de 3 ». On peut vérifier aisément que le prédicat $P(n)$ possède la propriété d'hérédité à partir de 0. Pourtant, pour tout entier naturel n, la proposition $P(n)$ est fausse car, pour tout entier naturel n, 2^n n'est pas un multiple de 3.
Le théorème de récurrence ne peut pas s'appliquer car la récurrence ne peut pas être initialisée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entier naturel n_0 tel que la proposition $P(n_0)$ soit vraie.

Remarque 2 : Il se peut qu'il y ait des "trous" dans l'hérédité.
Par exemple, si on considère le prédicat défini sur $\mathbb{N}$ par $P(n)$: « $2^n \geq n^2$ ». L'implication $[\,P(n) \Rightarrow P(n+1)\,]$ est vraie pour $n = 0$, $n = 1$ et pour tout $n \geq 3$, mais elle n'est pas vraie pour $n = 2$, car $P(3)$ est FAUX alors que $P(2)$ est VRAI.
Dans ce cas, la récurrence ne peut être initialisée qu'à $n_0 = 4$, bien que $P(0)$ VRAI, $P(1)$ VRAI et $P(2)$ VRAI. Le théorème de récurrence permet, lui, de montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
En conclusion, on peut affirmer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$, $2^n \geq n^2$.

Chapitre 2

Utiliser les nombres complexes

L'objectif de ce chapitre est d'apporter des compléments aux notions sur les nombres complexes déjà vues en Terminale S.

En particulier, on travaillera la résolution des équations du second degré à coefficients complexes, la détermination des racines n-ième de l'unité en lien avec la forme trigonométrique d'un nombre complexe ainsi que l'interprétation géométrique de ces notions et leur application à la géométrie.

Programme

Révision : définitions et propriétés vues en Terminale sur les nombres complexes (forme algébrique, parties réelle ou imaginaire, conjugué, module, inégalité triangulaire, représentation géométrique, équation du second degré à coefficients réels).

Équations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines. Racine carrée d'un nombre complexe.

Forme trigonométrique et argument d'un nombre complexe non nul. Formules de de Moivre et d'Euler. Racines n-ième de l'unité, propriétés. Représentations géométriques.

Application à la trigonométrie et/ou la géométrie : factorisation et linéarisation d'expressions trigonométriques, caractérisation complexe de configurations géométriques ou de transformations du plan classiques (translation, rotation, symétrie).

2.1 Rappels de Terminale S

Aucune démonstration dans ce paragraphe qui reprend des définitions et propriétés classiques vues en Terminale S sur les nombres complexes. L'étudiant pourra se reporter à un manuel scolaire de Terminale S.

2.1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

On admet l'existence de l'ensemble des nombres complexes.

Proposition 2.1.
Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, dont les éléments s'écrivent sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels, sur lequel on peut définir les relations suivantes :
Pour tous nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$,

- ÉGALITÉ DANS $\mathbb{C}$: *$z = z'$ si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$;*
- ADDITION DANS $\mathbb{C}$: *$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;*
- MULTIPLICATION DANS $\mathbb{C}$: *$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$.*

REMARQUE : En particulier, le nombre complexe i vérifie $i^2 = -1$ et $\frac{1}{i} = -i$.

REMARQUE : On a donc la chaîne d'inclusions strictes suivantes entre les ensembles de nombres usuels vus au lycée :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

NOTATION : On écrit souvent de façon plus simple zz', au lieu de $z \times z'$, le produit des nombres complexes z et z'.

Définition 2.1.
L'ensemble $\mathbb{C}$ est appelé ***ensemble des nombres complexes*** *et ses éléments sont appelés* ***nombres complexes****.*
Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où a et b sont des nombres réels, on dit que $a + ib$ est ***la forme (ou écriture) algébrique****, ou* ***cartésienne****, du nombre complexe z.*
Dans ce cas,

- *le réel a se note $a = \mathrm{Re}(z)$ et s'appelle alors* ***la partie réelle*** *de z ;*
- *le réel b se note $b = \mathrm{Im}(z)$ et s'appelle* ***la partie imaginaire*** *de z.*

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle s'appellent ***les nombres imaginaires purs****.*

REMARQUE : on prendra garde qu'une écriture de la forme $z = a + ib$, avec a ou b qui sont des nombres complexes non réels, n'est pas la forme algébrique de z. Il faut pour cela que a et b soient réels tous les deux.

En particulier, avec la terminologie et les notations précédentes :

Proposition 2.2.

1. *Pour tous nombres complexes z et z',*
$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$
2. *Pour tout nombre complexe z et pour tout réel λ,*
$$\mathrm{Re}(\lambda\, z) = \lambda\, \mathrm{Re}(z) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(\lambda\, z) = \lambda\, \mathrm{Im}(z).$$
3. *Un nombre complexe z est un nombre réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle, i.e. $\mathrm{Im}(z) = 0$.*
En particulier, l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ des nombres complexes de partie imaginaire nulle.
4. *Un nombre complexe z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle, i.e. $\mathrm{Re}(z) = 0$.*

REMARQUE : Le nombre 0 est le seul nombre complexe qui soit à la fois réel et imaginaire pur.

L'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ vérifient les mêmes règles usuelles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$:

Proposition 2.3.
Pour tous nombres complexes z, z' et z'',

$z + z' = z' + z$ *et* $z \times z' = z' \times z$ (***Commutativité de + et de ×***) ;

$(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$ *et* $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$ (***Associativité de + et de ×***) ;

$z + 0 = z$ *et* $z \times 1 = z$ (0 ***élément neutre pour + et*** 1 ***élément neutre pour ×***) ;

si on note $-z = (-a) + i(-b)$*, alors* $z + (-z) = 0$ ($-z$ ***est l'opposé de*** z ***pour +***) ;

$z \times (z' + z'') = (z \times z') + (z \times z'')$ (***Distributivité de ×***) ;

$z \times z' = 0$ *si, et seulement si,* $z = 0$ *ou* $z' = 0$.

De plus, tout nombre complexe non nul admet un inverse pour la multiplication :

Proposition 2.4.
Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe un nombre complexe z', noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}, tel que $z \times z' = 1$.
De façon précise, si $z = a + ib$ où a et b sont des réels, $z \neq 0$ si, et seulement si, $a^2 + b^2 \neq 0$, et dans ce cas,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}.$$

2.1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans la suite,

Définition 2.2.
On appelle ***plan complexe****, ou* ***plan d'Argand-Cauchy****, le plan de la géométrie élémentaire muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.*

Proposition 2.5.
À tout point M de coordonnées (x, y) du plan complexe on peut associer le nombre complexe $z_M = x + iy$. On dit que z_M est ***l'affixe du point*** *M.*
Réciproquement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ on peut associer le point M du plan complexe de coordonnées (x, y). On dit que M est ***l'image ponctuelle de*** *z.*

L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe est un réel est représenté par l'axe des abscisses $(O, \overrightarrow{u})$, aussi appelé ***l'axe des réels du plan complexe****.*

L'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe est un imaginaire pur est représenté par l'axe des ordonnées $(O, \overrightarrow{v})$, aussi appelé ***l'axe des imaginaires purs du plan complexe****.*

REMARQUE : En mathématiques, contrairement aux autres sens de ce mot dans la langue française, le mot "affixe" est un nom féminin : on dit " une affixe ".

De même :

Proposition 2.6.
À tout vecteur $\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}$ on peut associer le nombre complexe $z_{\overrightarrow{w}} = x + iy$. On dit que $z_{\overrightarrow{w}}$ est ***l'affixe du vecteur*** *$\overrightarrow{w}$.*
Réciproquement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ on peut associer le vecteur $\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{u} + y\,\overrightarrow{v}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est ***l'image vectorielle de*** *z.*

Proposition 2.7.
Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B, $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w'} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et λ un réel. Alors,

1. *le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$;*
2. *le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$;*
3. *le vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$;*
4. *le vecteur $\lambda\overrightarrow{w}$ a pour affixe $z_{\lambda\overrightarrow{w}} = \lambda z_{\overrightarrow{w}}$;*
5. *Si M et M' sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z', alors le point S d'affixe $z + z'$ est le symétrique du point O par rapport au milieu I du segment $[MM']$.*

2.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2.3.
Pour tout nombre complexe z, on appelle **nombre complexe conjugué de** *z, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.*

Proposition 2.8.
Pour tous z et z' nombres complexes,

1. $\overline{(\overline{z})} = z$;
2. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
3. *de plus, $z \neq 0$ si, et seulement si, $\overline{z} \neq 0$ et, dans ce cas, pour tout entier relatif k,*

$$\overline{z^k} = \overline{z}^k \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}.$$

Proposition 2.9.

1. *Pour tout nombre complexe z, $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$ ou encore*

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \ ;$$

2. *Un nombre complexe z est réel si, et seulement si, $\overline{z} = z$;*
3. *Un nombre complexe z est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z} = -z$.*

Proposition 2.10.
Si M est un point du plan complexe d'affixe z, alors, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique orthogonal du point M par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$ des réels.

2.1.4 Module d'un nombre complexe

Définition 2.4.
Pour tout nombre complexe z, on appelle **module de** *z, et on note $|z|$, le nombre réel positif $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$.*

Proposition 2.11.
Le module d'un nombre complexe généralise, dans $\mathbb{C}$, la notion de valeur absolue définie dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, si z est un nombre réel, alors le module de z coïncide avec la valeur absolue du réel z.

Proposition 2.12.
Pour tout nombre complexe z,

1. $|z|^2 = z \times \overline{z}$ *et* $|\overline{z}| = |z|$;
2. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, *et* $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$ *si, et seulement si, z est un nombre réel ;*
3. $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, *et* $|\mathrm{Im}(z)| = |z|$ *si, et seulement si, z est un nombre imaginaire pur.*

Proposition 2.13.
Pour tous nombres complexes z et z',

1. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ *et* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ ***(Inégalité triangulaire)*** ;
2. $|z| \neq 0$ *si, et seulement si,* $z \neq 0$ *et, dans ce cas,* $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Proposition 2.14.

1. *Si M est le point d'affixe z_M, alors* $|z_M| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.
2. *Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B, alors la distance entre les points A à B s'écrit*

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A|.$$

3. *Si $R > 0$ est un réel donné et Ω est un point du plan complexe d'affixe ω, alors l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $|z - \omega| = R$ est égal au cercle de centre Ω et de rayon R.*
Avec ces notations, l'équation complexe du cercle de centre Ω et de rayon R s'écrit

$$|z|^2 - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + |\omega|^2 = R^2.$$

2.2 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Rappel : Par convention, si x est un nombre réel positif, la notation $\sqrt{x}$ désigne l'unique réel positif dont le carré est égal à x, c'est-à-dire

$$y = \sqrt{x} \iff (y \geq 0 \text{ et } y^2 = x).$$

Définition 2.5.
Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des nombres complexes avec $a_n \neq 0$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation polynomiale de degré n à coefficients complexes $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, *c'est déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres complexes w tels que $a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + a_1 w + a_0 = 0$.*

On dit alors que les éléments de $\mathcal{S}$ sont ***les solutions de l'équation***

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

ou encore que les éléments de $\mathcal{S}$ sont ***les racines du polynôme de degré n à coefficients complexes*** $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

2.2.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 2.6.
Pour tout nombre complexe z_0, on appelle ***racine carrée complexe de z_0*** *tout nombre complexe w tel que $w^2 = z_0$.*

Proposition 2.15. Racine carrée dans $\mathbb{C}$
À part le nombre complexe 0 qui admet 0 comme seule racine carrée complexe, tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées complexes distinctes, opposées l'une de l'autre.
De façon précise,
Les racines carrées complexes de $z_0 = a + ib$, avec a et b réels, sont les nombres complexes opposés w et $-w$, où w est défini de la façon suivante :

- ◇ *dans le cas où z_0 est un nombre réel (i.e. $b = 0$),*
  1. *si $z_0 = 0$, alors $w = 0$;*
  2. *si $z_0 = a > 0$, alors $w = \sqrt{a}$;*
  3. *si $z_0 = a < 0$, alors $w = i\sqrt{-a}$;*
- ◇ *dans le cas où z_0 est un nombre complexe non réel (i.e. $b \neq 0$),*
  1. *si $b > 0$, alors $w = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$;*
  2. *si $b < 0$, alors $w = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.*

Exemple : Trouver les racines carrées complexes du nombre complexe $8 - 6i$.

Remarque : On veillera à ne jamais écrire des expressions telles que $\sqrt{i}$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{8-6i}$ ou, plus généralement, $w = \sqrt{z}$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.
Le symbole $\sqrt{\cdot}$ ne doit être réservé qu'aux nombres réels positifs ou nuls.

Remarque : On peut remarquer que, dans tous les cas, l'expression de la racine w donnée par la proposition 2.15 s'écrit

$$w = \sqrt{\frac{|z_0| + \mathrm{Re}(z_0)}{2}} + \varepsilon\, i\sqrt{\frac{|z_0| - \mathrm{Re}(z_0)}{2}},$$

avec $\varepsilon = +1$ si $\mathrm{Im}(z_0) \geq 0$, et $\varepsilon = -1$ si $\mathrm{Im}(z_0) < 0$.

Remarque : On peut vérifier que, si z_0 est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(z_0) + |z_0| \neq 0$, alors $\mathrm{Re}(z_0) + |z_0| > 0$ et les deux racines complexes de z_0 peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z_0 + |z_0|}{\sqrt{\mathrm{Re}(z_0) + |z_0|}} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z_0 + |z_0|}{\sqrt{\mathrm{Re}(z_0) + |z_0|}}.$$

2.2.2 Résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.16. Forme canonique
Soit a, b et c des nombres complexes avec $a \neq 0$. Alors, pour tout nombre complexe z,

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le second membre de l'expression précédente s'appelle ***la forme canonique*** *du trinôme $ax^2 + bx + c$ et le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ est son* ***discriminant****.*

Proposition 2.17. Équations à coefficients réels
On considère l'équation de second degré $az^2 + bz + c = 0$ (E), où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$. Alors $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.
De plus,

1. *si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet pour solutions dans $\mathbb{C}$ les deux racines réelles distinctes :*

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}\ ;$$

2. *si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet pour solutions dans $\mathbb{C}$ les deux racines réelles confondues :*

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}\ ;$$

   On dit que $-\frac{b}{2a}$ est une racine ***double*** *du trinôme $ax^2 + bx + c$.*

3. *si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet pour solutions dans $\mathbb{C}$ les deux racines complexes distinctes, non réelles, conjuguées l'une de l'autre :*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{C}.$$

Proposition 2.18. Équations à coefficients complexes
On considère l'équation de second degré $az^2 + bz + c = 0$ (E), *où* a, b *et* c *sont des nombres complexes avec* $a \neq 0$. *Alors* $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
De plus, en notant $\delta \in \mathbb{C}$ *une racine carrée de* Δ (*i.e.* $\delta^2 = \Delta$),

1. *si* $\Delta \neq 0$, *l'équation* (E) *admet pour solutions dans* $\mathbb{C}$ *les deux racines complexes distinctes :*

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} \in \mathbb{C}\ ;$$

2. *si* $\Delta = 0$, *l'équation* (E) *admet pour solutions dans* $\mathbb{C}$ *les deux racines complexes confondues :*

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{C}.$$

On dit que $-\frac{b}{2a}$ *est une racine* ***double*** *du trinôme* $ax^2 + bx + c$.

Remarque : On notera que dans $\mathbb{C}$ un trinôme du second degré admet toujours deux racines (distinctes ou confondues).

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 - (4+i)x + 5 + 5i = 0$.

2.2.3 Somme et produit des racines

Proposition 2.19.
Soit a, b *et* c *trois nombres complexes avec* $a \neq 0$. *Alors, pour tout nombre complexe* z, *on peut écrire* $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, *où* z_1 *et* z_2 *sont les deux solutions complexes (distinctes ou confondues) de l'équation du second degré* $az^2 + bz + c = 0$.

Proposition 2.20.
Soit a, b *et* c *trois nombres complexes avec* $a \neq 0$. *Alors* z_1 *et* z_2 *sont les deux solutions complexes (distinctes ou confondues) de l'équation du second degré à coefficients complexes* $az^2 + bz + c = 0$ *si, et seulement si,*

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque : De façon générale, on montre le résultat fondamental,

Proposition 2.21. Théorème de D'Alembert-Gauss
Soit $n \geq 1$ *un entier. Alors, toute équation polynomiale de degré* n *à coefficients complexes*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0,$$

admet exactement n *solutions (distinctes ou confondues)* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *dans* $\mathbb{C}$.
De plus, pour tout nombre complexe z, *on peut alors écrire*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_{n-1})(z - z_n).$$

Exemple : Montrer que l'équation $x^2 - (1-i)x + 2 + 3i = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ distinctes et non nulles qu'on notera z et z'.
Exprimer sous forme cartésienne les nombres complexes $z + z'$ et zz' et en déduire la forme cartésienne des nombres complexes $\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}$ et $z^2 + z'^2$.

2.3 Notation $e^{i\theta}$, formules de De Moivre et d'Euler

Rappel : Par définition, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Le sens direct usuellement choisi est celui qui fait passer du vecteur $\overrightarrow{u}$ au vecteur $\overrightarrow{v}$ par une rotation d'un quart de tour dans le sens trigonométrique (i.e. dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre).

Définition 2.7.
On appelle ***cercle-unité du plan complexe****, ou* ***cercle trigonométrique****, le cercle de centre O et de rayon 1 dans le plan complexe.*

On rappelle les résultats de trigonométrie suivants :

Proposition 2.22.

1. *Soit (x, y) un couple de réels tel que $x^2 + y^2 = 1$. Alors,*
   - *il existe un unique réel $\widetilde{\theta}$ vérifiant à la fois les trois conditions :*
   $$-\pi < \widetilde{\theta} \leq \pi, \quad \cos(\widetilde{\theta}) = x, \quad \sin(\widetilde{\theta}) = y\ ;$$
   - *un réel θ vérifie les deux équations $\cos(\theta) = x$ et $\sin(\theta) = y$ si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $\theta = \widetilde{\theta} + 2k\pi$.*
2. *Un point M appartient au cercle-unité si, et seulement si, il existe un réel θ tel que le point M ait pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ dans le repère $(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.*

Remarque : Un point M d'affixe z est situé sur le cercle-unité si, et seulement si, $|z| = 1$.

Notation : On note usuellement $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, i.e.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}.$$

Proposition 2.23.
Pour tout nombre complexe z, $|z| = 1$ si, et seulement si, il existe un réel θ tel que

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Proposition 2.24.
Pour tout réel θ, le point M d'affixe $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ est sur le cercle-unité et le réel θ est une mesure (exprimée en radians) de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}})$.

Notation : Dans la suite, étant donné $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs non nuls, on notera $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{w},\overrightarrow{w'}})$ une mesure exprimée en radians de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{w},\overrightarrow{w'}})$.

Remarque : On prendra soin de ne pas confondre l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{w},\overrightarrow{w'}})$ et sa mesure $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{w},\overrightarrow{w'}})$ qui pourrait ne pas être exprimée en radians.

D'après les formules trigonométriques vues au lycée :

Proposition 2.25.
Pour tous réels θ et θ', on a

1. $[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]\times[\cos(\theta')+i\sin(\theta')]=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$
2. $\cos(\theta)+i\sin(\theta)\neq 0$ *et*

$$\frac{\cos(\theta')+i\sin(\theta')}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\cos(\theta'-\theta)+i\sin(\theta'-\theta).$$

L'analogie des formules établies dans la proposition 2.25 avec les formules de multiplication de l'exponentielle, conduit à introduire la notation suivante :

Définition 2.8.
Pour tout réel θ, on posera $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ ou $\exp(i\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ (lire "exponentielle de $i\theta$").

Avec cette notation, $\mathbb{U}=\left\{e^{i\theta}\in\mathbb{C}\ /\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$ et la proposition 2.25 s'écrit :

Proposition 2.26.
Pour tous réels θ et θ', on a

1. $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$;
2. $e^{i\theta}\neq 0$ et $\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}}=e^{i(\theta'-\theta)}$.

Exemple : Voici quelques valeurs particulières classiques pour $e^{i\theta}$ qu'il est conseillé de connaître ou de savoir retrouver rapidement :

$$e^{2i\pi}=1\ ;\ e^{i\pi}=-1\ ;\ e^{i\frac{\pi}{2}}=i\ ;\ e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\ ;$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\ ;\ e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Proposition 2.27.
Pour tout réel θ,

$$\frac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\cos(\theta)-i\sin(\theta)=\overline{e^{i\theta}}.$$

Par récurrence, on obtient :

Proposition 2.28. Formule de De Moivre
Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n,

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta).$$

Exemple : En utilisant les formules de De Moivre, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Le résultat suivant découle directement de l'introduction de la notation $e^{i\theta}$ et des propriétés des fonctions cos, sin et tan :

Proposition 2.29. Formules d'Euler

1. *Pour tout réel* θ,
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \ ;$$
ou encore
$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta).$$
2. *Pour tout réel* $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *où* k *est un entier relatif quelconque,*
$$\tan(\theta) = -i\,\frac{1 - e^{-2i\theta}}{1 + e^{-2i\theta}}.$$

Application : Factorisation et linéarisation d'expressions trigonométriques.

Exemple : En utilisant les formules d'Euler, montrer que pour tout réel x,

$$\cos^3(x)\sin^2(x) = \frac{1}{16}\left[-\cos(5x) - \cos(3x) + 2\cos(x)\right] \quad \text{et} \quad \cos^3(x)\sin^3(x) = \frac{1}{32}\left[-\sin(6x) + 3\sin(2x)\right].$$

2.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Proposition 2.30.
Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, *le nombre complexe* $\frac{z}{|z|}$ *est de module* 1, *c'est-à-dire* $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$ *ou encore* $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.
Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, *il existe un réel* θ *tel que* $z = |z|\,e^{i\theta}$.

Proposition 2.31. Unicité de r et de $e^{i\theta}$
Soit $r > 0$, $r' > 0$, θ *et* θ' *quatre réels. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'}$;
(ii) $r = r'$ *et* $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$;
(iii) $r = r'$ *et il existe un entier relatif* k *tel que* $\theta' = \theta + 2k\pi$.

Définition 2.9. Argument et forme trigonométrique
Soit un nombre complexe $z \neq 0$. *Alors,*
- *tout réel* θ *tel que* $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ *s'appelle* ***un* argument de** z, *et on note* $\theta = \arg(z)$;
- *l'écriture* $z = r\,e^{i\theta}$, *où* $r = |z| \in]0, +\infty[$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *est un argument de* z, *s'appelle* ***la forme trigonométrique de*** z, *ou quelquefois* ***la forme polaire de*** z.

Remarques : La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul est unique au sens précisé par la proposition 2.31 : le module de z, et le nombre complexe $e^{i\theta}$ de module 1, sont complètement déterminés par la donnée du nombre complexe non nul z.
En revanche, le réel θ qui apparaît dans l'exposant de $e^{i\theta}$ n'est pas unique : un argument θ_1 de z étant donné, tous les réels θ de la forme $\theta = \theta_1 + 2k\pi$, où k est un entier relatif, sont encore des arguments de z (différent de θ_1, si l'entier k est non nul).
On exprimera cette relation entre tous les arguments de z en disant que **le réel** $\arg(z)$ **est défini à un multiple entier de** 2π **près** ou encore que **le réel** $\arg(z)$ **est défini modulo** 2π**.** On écrira alors de façon abrégée : $\arg(z) \equiv \theta_1$ [modulo 2π] ou encore, de façon abusive, $\arg(z) = \theta_1$

[modulo 2π].

Proposition 2.32. Argument principal de z
Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique argument $\widetilde{\theta}$ de z vérifiant $-\pi < \widetilde{\theta} \leq \pi$.

On dit alors que $\widetilde{\theta}$ est ***l'argument principal de*** *z et on le note $\widetilde{\theta} = \mathrm{Arg}(z)$.*

Remarque : On fera attention à la lettre majuscule "A" dans la notation $\mathrm{Arg}(z)$ pour signifier qu'on parle de l'argument principal et non d'un argument quelconque de z.

Proposition 2.33.
Soit $z \neq 0$ un nombre complexe de forme trigonométrique $z = r\,e^{i\theta}$ et M le point du plan complexe d'affixe z. Alors, $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\theta = \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$ est une mesure (exprimée en radians) de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$.
De plus, $\mathrm{Re}(z) = r\,\cos(\theta)$, $\mathrm{Im}(z) = r\,\sin(\theta)$ et $\overline{z} = r\,e^{-i\theta}$.

Exemple : Déterminer la forme cartésienne du nombre complexe $(1+i)^{16}$. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $2 - 2i$.

Proposition 2.34. Opérations sur les arguments
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, soit λ un réel non nul et n un entier relatif. On a alors les relation suivantes :

1. $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')$ [modulo 2π] ;
2. $\arg(z^n) \equiv n\,\arg(z)$ [modulo 2π] ;
3. *si* $\lambda > 0$, $\arg(\lambda\,z) \equiv \arg(z)$ [modulo 2π] ;
4. *si* $\lambda < 0$, $\arg(\lambda\,z) \equiv \arg(z) + \pi$ [modulo 2π] ;
5. $\arg(\overline{z}) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)$ [modulo 2π] ;
6. $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)$ [modulo 2π].

Proposition 2.35. Argument d'un réel
Soit z un nombre complexe non nul, alors

1. *z est un nombre réel strictement positif, si et seulement, si il existe un entier relatif k tel que $\arg(z) = 2k\pi$, ce qu'on peut aussi écrire $\arg(z) \equiv 0$ [modulo 2π] ;*
2. *z est un nombre réel strictement négatif, si et seulement, si il existe un entier relatif k tel que $\arg(z) = \pi + 2k\pi$, ce qu'on peut aussi écrire $\arg(z) \equiv \pi$ [modulo 2π].*

De façon générale, z est un nombre réel, si et seulement, si $z = 0$, ou si $z \neq 0$ et s'il existe un entier relatif k tel que $\arg(z) = k\pi$ (ce qu'on peut aussi écrire $\arg(z) \equiv 0$ [modulo π]).

Proposition 2.36. Argument d'un imaginaire pur
Soit z un nombre complexe non nul, alors

1. *z est un nombre imaginaire pur à partie imaginaire strictement positive, si et seulement, si il existe un entier relatif k tel que $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ce qu'on peut aussi écrire $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[\text{modulo}\, 2\pi]$;*
2. *z est un nombre imaginaire pur à partie imaginaire strictement négative, si et seulement, si il existe un entier relatif k tel que $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ce qu'on peut aussi écrire $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[\text{modulo}\, 2\pi]$.*

De façon générale, z est un nombre imaginaire pur, si et seulement, si $z = 0$, ou si $z \neq 0$ et s'il existe un entier relatif k tel que $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (ce qu'on peut aussi écrire $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[\text{modulo}\, \pi]$).

2.5 Racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe

2.5.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 2.10. Racines n-ième de l'unité
Soit $n \geq 1$ un entier fixé. On appelle ***racine n-ième de l'unité dans*** *$\mathbb{C}$ tout nombre complexe w tel que $w^n = 1$.*

Remarque : On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, i.e.

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}.$$

Comme pour $n = 1$, $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, on s'intéressera donc désormais au cas $n \geq 2$. En particulier, si $z \in \mathbb{U}_n$ alors $|z| = 1$, ce qui exprime que, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}$.

Proposition 2.37. Existence des racines n-ièmes de l'unité
Soit $n \geq 1$ un entier fixé,

1. *les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où k parcourt l'ensemble des entiers relatifs ;*
2. *pour tous entiers relatifs k et k', les deux racines n-ièmes de l'unité $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$ sont égales si, et seulement si, $k \equiv k'\,[n]$, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif q tel que $k = k' + qn$;*
3. *il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, deux à deux distinctes, données par les nombres complexes $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$;*
4. *pour tout entier $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, on a $\omega_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = (\omega_1)^k$.*

Notation : En vue de la proposition suivante 2.38, on introduit la notation usuelle

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En particulier, on vérifiera que $j^2 = \overline{j}$, $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Proposition 2.38. Racines n-ièmes de 1 pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

1. $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.
2. $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$.
3. $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$;
4. $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.
5. $\mathbb{U}_5 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\}$.
6. $\mathbb{U}_6 = \{1, j, j^2, -1, -j, -j^2\}$.

À démontrer en exercice en TD ? Les représenter graphiquement.

De façon générale,

Proposition 2.39. Propriétés des racines n-ièmes de l'unité
Soit $n \geq 2$ un entier fixé, et $\omega_0 = 1$, $\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}$ les n racines n-ièmes de l'unité deux à deux distinctes.

1. *La somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle, i.e. $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1} = 0$.*
2. *Si $n \geq 3$ et si, pour tout $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, on note A_k le point d'affixe ω_k du plan complexe, alors le polygone $A_0 A_1 A_2 \cdots A_{n-2} A_{n-1}$ est un polygone à n côtés, convexe, régulier, inscrit dans le cercle-unité.*

À démontrer en exercice en TD ?

Exemple : Soit $n \geq 2$ un entier. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = (z-1)^n$.

2.5.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 2.11. Racines n-ièmes de $z_0 \in \mathbb{C}$
*Soit $n \geq 1$ un entier fixé et z_0 un nombre complexe. On appelle **racine n-ième de z_0 dans** $\mathbb{C}$ tout nombre complexe w tel que $w^n = z_0$.*

Remarque : Si $z_0 = 0$, l'équation devient $z^n = 0$, qui admet 0 pour unique solution. Désormais on s'intéressera au cas $z_0 \neq 0$.

Proposition 2.40. Existence des racines n-ièmes de $z_0 \neq 0$
Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit z_0 un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $z_0 = |z_0| e^{i\theta_0}$ ($|z_0| \neq 0$ et θ_0 est un argument de z_0).

1. *Le nombre complexe z_0 admet exactement n racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$ données par les nombres complexes, où $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, de forme trigonométrique*
$$\sqrt[n]{|z_0|}\ \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{|z_0|}\ \exp\left(i\frac{\theta_0}{n}\right)\ \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right).$$
2. *On obtient toutes les racines n-ièmes de z_0 en multipliant l'une d'entre elles par les racines n-ièmes de l'unité.*

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 8i$.

La proposition suivante est une conséquence des propositions 2.39 et 2.40 :

Proposition 2.41. Propriétés des racines n-ièmes de $z_0 \in \mathbb{C}$
Soit $n \geq 2$ un entier fixé et z_0 un nombre complexe non nul.

1. *La somme des n racines n-ièmes de z_0 est nulle.*
2. *Si $n \geq 3$, les n points du plan complexe d'affixes respectives les n racines n-ièmes de z_0 forment un polygone à n côtés, convexe, régulier, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|z_0|}$.*

2.6 Applications des nombres complexes à la géométrie

Proposition 2.42. Cercle et disque
Soit Ω un point du plan complexe d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ un réel donnés.
Alors

1. *un point M du plan complexe d'affixe z appartient au cercle de centre Ω et de rayon R si, et seulement si, il existe un réel θ tel que $z = \omega + R\, e^{i\theta}$;*
2. *un point M du plan complexe d'affixe z appartient au disque fermé (resp. ouvert) de centre Ω et de rayon R si, et seulement si, il existe un réel θ et un réel $r \in [0, R\,]$ (resp. $r \in [0, R\,[$), tels que $z = \omega + r\, e^{i\theta}$.*

À démontrer en exercice en TD ?

Proposition 2.43. Angle de vecteurs
Soit A et B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B tels que $A \neq B$.
Alors, la mesure (exprimée en radian) de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}})$ est un argument [modulo 2π] *du nombre complexe $z_B - z_A$ ou, avec les notations introduites,*

$$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \arg\left(z_B - z_A\right) \ \text{[modulo } 2\pi\text{]}.$$

À démontrer en exercice en TD ?

Proposition 2.44. Angle de vecteurs
Soit A, B, C et D quatre points du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Alors, la mesure (exprimée en radian) de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ est un argument [modulo 2π] *du nombre complexe $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ ou, avec les notations introduites,*

$$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ \text{[modulo } 2\pi\text{]}.$$

À démontrer en exercice en TD ?

En particulier, on obtient par corollaire de la proposition précédente :

Proposition 2.45. Angle et alignement de points
Soit A, B et C trois points du plan complexe, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C, tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.
Alors,

1. *la mesure (exprimée en radian) de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est un argument* [modulo 2π] *du nombre complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ou, avec les notations introduites,*
$$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [\text{modulo } 2\pi] \ ;$$
2. *les trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre réel non nul ;*
3. *les deux droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si, et seulement si, le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un nombre imaginaire pur non nul.*

À démontrer en exercice en TD ?

Exemple : Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$, $2i - 1$ et $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) i - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Proposition 2.46. Transformations du plan

1. *Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan d'affixe $z_{\overrightarrow{w}}$ donnée. Soit M un point d'affixe z.*
Alors l'affixe z' du point M' image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est donnée par
$$z' = z + z_{\overrightarrow{w}}.$$
2. *Soit k un réel et Ω un point du plan d'affixe ω donnés. Soit M un point d'affixe z.*
Alors l'affixe z' du point M' image du point M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k est donnée par
$$z' = \omega + k(z - \omega).$$
3. *Soit θ un nombre réel et Ω un point du plan d'affixe ω donnés. Soit M un point d'affixe z.*
Alors l'affixe z' du point M' image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle θ est donnée par
$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Définition 2.12. Expression complexe d'une transformation
Avec les notations et hypothèses de la proposition 2.46 précédente, on dit que les relations $z' = z + z_{\overrightarrow{w}}$, $z' = \omega + k(z - \omega)$ et $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$ sont ***les expressions complexes*** *respectivement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.*

Exemple : Préciser la transformation géométrique dont l'expression complexe est donnée, avec les notations précédentes, respectivement par les relations $z' = iz + 1$; $z' = z + 3 - i$; $z' = 2z + 3$.

Chapitre 3

Majorer, minorer, passer à la limite

Prérequis : Le langage, le vocabulaire et les résultats élémentaires usuels liés aux fonctions vus en Terminale et en cours d'algèbre et d'analyse de Starter (monotonie, continuité, parité, dérivabilité, ensemble de définition, sens de variation, composition des fonctions, ensemble-image d'une fonction, ...

Programme
Révision : définitions et propriétés vues en Terminale sur les suites et fonctions numériques (suites croissante, décroissante, majorée, minorée, bornée, convergente, divergente ; fonctions logarithme, exponentielle, trigonométriques ; limites d'une fonction, dérivation, théorème des valeurs intermédiaires), opérations sur les limites.
Techniques de majoration et de minoration : cas d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; inégalités classiques ; majorer (minorer) une fonction ou le terme général d'une suite réelle.
Notions de majorant, minorant, borne supérieure (resp. inférieure), maximum, minimum : Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (admis). Distinction entre borne supérieure (resp. inférieure) et maximum (resp. minimum) pour une partie de $\mathbb{R}$; cas des fonctions numériques.
Application à l'étude de suites : Suite convergente ou divergente, limite (finie ou infinie) d'une suite. Lien entre la définition donnée en Terminale et la définition formalisée "avec les ε". Unicité de la limite. Toute suite majorée croissante (resp. minorée décroissante) admet une limite. Théorème des gendarmes. Passage à la limite dans des inégalités larges ou strictes.

3.1 Techniques de majoration et de minoration

Définition 3.1.
Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, s'il existe deux fonctions g et h définies également sur D telles que, pour tout réel $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, on dit que la fonction f ***est encadrée par les fonctions** g **et** h **sur** D* *ou que les fonctions g* ***et** h **constituent un encadrement de** f **sur** D.*
On dit aussi, dans ce cas, que ***la fonction** g **minore la fonction** f **sur** D* *et que* ***la fonction** h **majore la fonction** f **sur** D.*

Remarque : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une fonction $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u(n) = u_n \in \mathbb{R}$, la définition précédente s'applique aussi aux suites de réels.

Remarque : Comme, pour tout réel $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \;\; \Leftrightarrow -f(x) \leq -g(x)$, on voit que la recherche d'une fonction minorant f revient à la recherche d'une fonction majorant $-f$; donc tout problème de minoration peut se ramener à un problème de majoration.

3.1.1 Utilisation des propriétés des opérations + et ×

Les techniques de majoration/minoration reposent sur des propriétés élémentaires de la relation d'ordre usuelle en lien notamment avec les opérations (i.e. compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations + et ×) dans $\mathbb{R}$, dont nous rappelons les plus utilisées ci-dessous :

Proposition 3.1.
Soit a, b, a', b' et α des réels, alors

1. $a \leq b \;\Rightarrow\; a+\alpha \leq b+\alpha$;
2. $ab \geq 0 \;\Rightarrow\; [\,(a \geq 0 \text{ et } b \geq 0) \text{ ou } (a \leq 0 \text{ et } b \leq 0)\,]$;
3. $[\,a \leq b \text{ et } \alpha > 0\,] \;\Rightarrow\; a\,\alpha \leq b\,\alpha$ *(sens de l'inégalité inchangé) ;*
4. $[\,a \leq b \text{ et } \alpha < 0\,] \;\Rightarrow\; a\,\alpha \geq b\,\alpha$ *(sens de l'inégalité changé) ;*
5. $[\,a \leq b \text{ et } a' \leq b'\,] \;\Rightarrow\; a+a' \leq b+b'$ *(addition membre à membre) ;*
6. $[\,0 < a \leq b \text{ et } 0 < a' \leq b'\,] \;\Rightarrow\; aa' \leq bb'$ *(multiplication membre à membre positifs) ;*
7. $[\,0 < a \leq b \text{ et } 0 < a' \leq b'\,] \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{b'} \leq \dfrac{b}{a'}$.

Remarque : L'item 5 est faux pour la soustraction : $[\,a \leq b \text{ et } a' \leq b'\,] \;\not\Rightarrow\; a-a' \leq b-b'$ (exercice : trouver un contre-exemple).

Proposition 3.2. Inégalités triangulaires
Pour tous nombres complexes z et z', $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ et $|\,|z|-|z'|\,| \leq |z-z'|$.
En particulier, pour tous nombres réels a et b, $|a+b| \leq |a|+|b|$ et $|\,|a|-|b|\,| \leq |a-b|$.

Démonstration en exercice : Soit z et z' deux nombres complexes.

1. Vérifier les relations $|z|^2 = z\overline{z}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $2\,\mathrm{Re}(z) = z+\overline{z}$.
2. Montrer l'inégalité $|z+z'|^2 \leq |z|^2 + 2\,|\mathrm{Re}(\overline{z}z')| + |z'|^2$.
3. En déduire les inégalités triangulaires : Pour tous nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ et $|\,|z|-|z'|\,| \leq |z-z'|$. □

Proposition 3.3. Inégalités élémentaires classiques
Pour tous réels a et b,

1. $2|ab| \leq a^2+b^2$ *avec l'égalité si, et seulement si,* $|a| = |b|$;
2. $4ab \leq (a+b)^2$ *avec l'égalité si, et seulement si,* $a = b$;
3. *si* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ *avec l'égalité si, et seulement si,* $a = 0$ *ou* $b = 0$;
4. *si* $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ *avec l'égalité si, et seulement si,* $a = b$.

Démonstration en exercice.

Application : Pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ avec l'égalité si, et seulement si, $x = 1$. □

3.1.2 Utilisation des propriétés des fonctions

Les techniques de majoration utilisent aussi les propriétés de monotonie des fonctions ou la mise en évidence d'extrema :

Proposition 3.4.

1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour tous réels a et b dans I,*
   (a) $[\, a \leq b$ et f croissante sur $I\,] \;\Rightarrow\; f(a) \leq f(b)$;
   (b) $[\, a \leq b$ et f décroissante sur $I\,] \;\Rightarrow\; f(a) \geq f(b)$;
2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I.*
   (a) *Si f est croissante sur I, alors, pour tout réel x de I tel que $x \leq a$, $f(x) \leq f(a)$;*
   (b) *Si f est décroissante sur I, alors, pour tout réel x de I tel que $x \geq a$, $f(x) \leq f(a)$;*
   (c) *Si f possède un maximum sur I au point a, alors pour tout réel $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$;*
   (d) *Si f possède un minimum sur I au point a, alors pour tout réel $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.*

Pour démontrer qu'une fonction h définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ majore, ou minore, une fonction f définie aussi sur un intervalle I, on peut étudier le signe de la fonction intermédiaire $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = h(x) - f(x)$.

Proposition 3.5. Inégalité de Bernoulli
Pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Démonstration en exercice : Méthode 1 : Étudier la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = (1+x)^n - (1+nx)$.
Méthode 2 : On peut aussi faire un raisonnement par récurrence sur le prédicat, dépendant de l'entier $n \geq 1$, en posant $P(n)$: « Pour tout réel $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ».□

Une autre inégalité très utile en probabilités notamment,

Proposition 3.6.
Pour tout réel x, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ avec l'égalité si, et seulement si, $x = \frac{1}{2}$.

Démonstration en exercice : Étudier les extrema de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x(1-x)$. □

Voici quelques encadrements classiques de fonctions élémentaires à connaître :

Proposition 3.7.

1. *Pour tout réel $x \geq 0$,*
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$
2. *Pour tout réel x,*
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1.$$
3. *Pour tout réel $x \geq 0$,*
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$
4. *Pour tout réel $x > -1$,*
$$\ln(1+x) \leq x.$$
5. *Pour tout réel $x > 0$,*
$$\ln x < x.$$
6. *Pour tout réel x,*
$$1 + x \leq e^x.$$

Démonstration en exercice : Introduire et étudier des fonctions intermédiaires pour chaque inégalité. □

Exemple : Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x},$$

et par conséquence,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}. \;\square$$

Pour démontrer une inégalité, on peut aussi être amené à utiliser les propriétés des trinômes du second degré,

Proposition 3.8. Inégalité de Cauchy-Schwarz
Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tous n-uplets de réels $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \cdots + |a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

où l'égalité a lieu si, et seulement si, les vecteurs $(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)$ et $(|b_1|, |b_2|, \cdots, |b_n|)$ de $\mathbb{R}^n$ sont colinéaires.
Par l'inégalité triangulaire, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

où l'égalité a lieu si, et seulement si, les vecteurs $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sont colinéaires.

Démonstration en exercice : On exprime que, pour tout réel x, $P(x) \geq 0$, où P est le trinôme du second degré

$$P(x) = (|a_1|x+|b_1|)^2 + (|a_2|x+|b_2|)^2 + \cdots + (|a_n|x+|b_n|)^2 = x^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

Par suite, le discriminant de P est négatif ou nul ; ce qui conduit à l'inégalité cherchée. □

Application : Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout n-uplet de réels tous strictement positifs $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2. \;\square$$

3.1.3 Utilisation des propriétés des intégrales

Proposition 3.9.
Soit a et b deux réels dans I tels que $a < b$, f, g et h trois applications définies et continues sur l'intervalle $[a\,,b]$ de $\mathbb{R}$.
Si, pour tout réel $x \in [a\,,b]$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors on a l'encadrement

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx.$$

EXEMPLE : Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

Ce qui entraîne que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

3.2 Majorant, minorant, bornes supérieure et inférieure

Rappelons quelques définitions déjà vues dans les cours d'Algèbre et d'Analyse.

Définition 3.2. Majorant, minorant, bornes sup **et** inf
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On appelle ***majorant de*** *A (resp.* ***minorant de*** *A) tout réel m tel que, pour tout $a \in A$, $a \leq m$ (resp. $m \leq a$).*
On dit que la partie A est ***majorée****, si elle possède au moins un majorant.*
On dit que la partie A est ***minorée****, si elle possède au moins un minorant.*
On dit que la partie A est ***bornée****, si elle est à la fois majorée et minorée.*

REMARQUE : Un majorant ou un minorant de A n'est pas nécessairement un élément de A. Mais si la partie A de $\mathbb{R}$ contient un majorant de A, elle ne peut en contenir qu'un seul. De même, une partie A de $\mathbb{R}$ ne peut contenir qu'au plus un minorant de A (démonstration en exercice).

D'où la définition :

Définition 3.3. Bornes sup **et** inf
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Un majorant (resp. minorant) de A qui appartient lui-même à A est appelé ***le plus grand élément de*** *A et noté $\max A$ (resp.* ***le plus petit élément de*** *A et noté $\min A$).*
S'il existe, on appelle ***borne supérieure de la partie*** *A, et on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A.*
S'il existe, on appelle ***borne inférieure de la partie*** *A, et on note $\inf A$, le plus grand des minorants de A.*

REMARQUE : Si elle existe, $\sup A$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A et $\inf A$ est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A.

EXEMPLE : Donner divers exemples.

REMARQUE : Si A possède un plus grand (resp. plus petit) élément, alors $\max A = \sup A$ (resp. $\min A = \inf A$). En particulier, si A est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$, alors A possède un plus grand et un plus petit élément.
Mais si A est infini, la partie A n'a pas nécessairement de plus grand élément, ni de plus petit élément (contre exemple : $A =]-1\,,2[$). Dans ce cas, $\sup A$ (resp. $\inf A$) n'est pas nécessairement le plus grand (resp. petit) élément de A (contre exemple : prendre $A =]-1\,,2[$, $\sup\,]-1\,,2[= 2$ car 2 est le plus petit des majorants de A, mais 2 n'est pas le plus grand élément de A car $2 \notin A$ et $\inf\,]-1\,,2[= -1$ car -1 est le plus grand des minorants de A mais n'est pas le plus petit élément de A car $-1 \notin A$).

Si une partie A de $\mathbb{R}$ majorée n'a pas nécessairement de plus grand élément, en revanche, elle admet toujours une borne supérieure, comme le précise le résultat ci-dessous qu'on admettra et qui constitue une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels :

Proposition 3.10. Propriété de la borne supérieure/inférieure dans $\mathbb{R}$

1. *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*
2. *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 3.11. Caractérisation de la borne sup/inf
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. *Un nombre réel M est la borne supérieure de la partie A si, et seulement si, le réel M vérifie les deux conditions :*
   (a) *pour tout réel $a \in A$, $a \leq M$;*
   (b) *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$.*
2. *Un nombre réel m est la borne inférieure de la partie A si, et seulement si, le réel m vérifie les deux conditions :*
   (a) *pour tout réel $a \in A$, $a \geq m$;*
   (b) *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a < m + \varepsilon$.*

Remarque : L'item 1a de la proposition 3.11 exprime que M est un majorant de A, alors que l'item 1b précise que ce majorant est le plus petit.

De même, l'item 2a de la proposition 3.11 exprime que m est un minorant de A, alors que l'item 2b précise que ce minorant est le plus grand.

3.3 Passer à la limite dans des suites

3.3.1 Définitions de base

Définition 3.4.
*On appelle **suite réelle** toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$*

$$u : n \in \mathbb{N} \mapsto u(n) \in \mathbb{R}.$$

*L'image par l'application u d'un entier naturel n est notée usuellement u_n (au lieu de $u(n)$) et se lit « u indice n ». On dit que u_n est le **terme général de rang n de la suite**.*

Usuellement, on note plutôt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{\mathbb{N}}$ (ou même plus rapidement (u_n)) l'application u.

Si on veut préciser que le terme général u_n de la suite n'est défini (ou n'est considéré) qu'à partir d'un rang n_0, on notera la suite plutôt $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Définition 3.5.
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***croissante*** *(resp.* ***décroissante****)* ***à partir d'un certain rang****, s'il existe un entier naturel* n_0 *tel que, pour tout entier* $n \geq n_0$*, on ait* $u_{n+1} \leq u_n$ *(resp.* $u_{n+1} \geq u_n$*).*

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***monotone à partir d'un certain rang****, si elle est décroissante à partir d'un certain rang* *ou* *si elle est croissante à partir d'un certain rang.*

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***majorée*** *(resp.* ***minorée****), s'il existe un réel* α *tel que, pour tout entier naturel* n*, on ait* $u_n \leq \alpha$ *(resp.* $u_n \geq \alpha$*).*

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***bornée*** *si elle est, à la fois, majorée* *et* *minorée.*

Remarque : Dans les définitions précédentes si $n_0 = 0$ on parle simplement de suite croissante, décroissante, monotone.

Exemple :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = \frac{2n+1}{3n-1}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est majorée par $\frac{3}{2}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie, par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + 3$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est majorée.

3.3.2 Notion de limite de suite

Rappelons tout d'abord que :

Définition 3.6. Intervalle ouvert
On dit que I *est un* ***intervalle ouvert de*** $\mathbb{R}$ *si* $I = \emptyset$ *ou* $I = \mathbb{R}$ *ou si* I *est une partie de* $\mathbb{R}$ *de l'une des formes suivantes :*

1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b\}$*, où* a *et* b *sont des réels tels que* $a < b$ *;*
2. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x\}$*, où* a *est un réel ;*
3. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x < a\}$*, où* a *est un réel.*

Définitions de la limite en Terminale prise dans le manuel de mathématiques de Terminale S, Collection INDICE (Enseignement spécifique, nouvelle édition 2016, éditions Bordas) :

Définition 3.7. Limite d'une suite (définition de Terminale)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers le réel* L *si tout intervalle* *ouvert* *contenant* L *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On dit que L *est la* ***limite de la suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et on écrit alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$*.*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *si tout intervalle du type* $]A, +\infty[$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*.*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$ *si tout intervalle du type* $]-\infty, A[$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*.*

Illustration graphique : illustrer la notion de convergence par un dessin.

Remarque : Dans le cas de la définition de la convergence d'une suite vers une limite finie L, préparer la transition vers une écriture plus formalisée (dite de Cauchy) :

1. L'expression "à partir d'un certain rang" s'explicite avec les quantificateurs (cf. chapitre 1 de Logique) par « il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geq N$, $u_n \in I$ ».
2. On rappelle les équivalences :

$$x \in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[\quad \Leftrightarrow \quad L-\varepsilon < x < L+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |L-x| < \varepsilon.$$

3. En fait, dans la définition de la convergence d'une suite vers une limite finie L, il suffit de se limiter à prouver l'assertion pour tout intervalle ouvert seulement de la forme $]L-\varepsilon\,,\, L+\varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif. Concrètement, cela signifie qu'on peut remplacer dans cette définition l'expression « tout intervalle ouvert contenant L » par « tout intervalle ouvert de la forme $]L-\varepsilon\,,\, L+\varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif ».
   Pour la définition de la convergence dans $\mathbb{R}$ d'une suite, on peut donc se contenter de considérer des intervalles ouverts uniquement de la forme $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, où ε décrit l'ensemble des réels strictement positifs.

Définition 3.8. Limite d'une suite (définition formalisée)
*On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet une limite dans** $\mathbb{R}$ (ou **est convergente dans** $\mathbb{R}$) s'il existe un réel L tel que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N_ε tel que, pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$, on ait $|u_n - L| < \varepsilon$.*
*On dit que L est la **limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.*

*On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ (ou **diverge vers** $+\infty$) si, pour tout réel A, il existe un entier naturel N_A tel que, pour tout entier $n \geq N_A$, on ait $u_n > A$.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

*On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ (ou **diverge vers** $-\infty$) si, pour tout réel A, il existe un entier naturel N_A tel que, pour tout entier $n \geq N_A$, on ait $u_n < A$.*
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque : Avec le formalisme vu en logique mathématique, ces définitions peuvent aussi s'écrire :
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\left[\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon)\right]$;

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L $\Leftrightarrow$ $\left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon)\right]$;

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $[\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n > A)]$;

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ $\Leftrightarrow$ $[\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n < A)]$.

En appliquant les règles de négation des propositions logiques (vues dans le chapitre 1 sur la logique) à ces énoncés logiques, on obtient :
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\left[\forall L \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } |u_n - L| \geq \varepsilon)\right]$;

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers L $\Leftrightarrow$ $\left[\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } |u_n - L| \geq \varepsilon)\right]$;

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $+\infty \;\Leftrightarrow\; [\,\exists A\in\mathbb{R}, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\in\mathbb{N}, (n\geq N \text{ et } u_n\leq A)\,]$;

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $-\infty \;\Leftrightarrow\; [\,\exists A\in\mathbb{R}, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\in\mathbb{N}, (n\geq N \text{ et } u_n\geq A)\,]$.

On notera la différence entre les deux énoncés « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ » (où la limite n'est pas précisée) et l'énoncé « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L\in\mathbb{R}$ » (où la limite est précisée et vaut L).

Remarque : On prendra garde que, par convention, la seule écriture « $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ », tout comme la phrase « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel L », comportent implicitement les deux affirmations (à démontrer toutes les deux) suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$;
2. la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à L.

L'utilisation de l'article défini dans la phrase « L est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ », des définitions 3.7 et 3.8, est justifiée par le résultat suivant :

Proposition 3.12.
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$, cette limite est unique.

Démonstration : Non effectuée en Terminale ; A faire : raisonnement pas l'absurde.

Proposition 3.13.
Soit n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée, alors la suite $(u_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tronquée de ses n_0 premiers termes.
Dans ce cas,
- *soit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers une même limite (finie ou infinie) ;*
- *soit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent pas de limite.*

Exercice : Démonstration laissée en exercice.

Exemple : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \sqrt{n}$.

1. À partir de quel rang a t-on $v_n > 1000$?
2. En appliquant directement la définition de la limite d'une suite, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice : En appliquant directement les définitions des limites de suites réelles, étudier la convergence des suites :

$$\left(\pi + \frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1} \;;\; \left((-1)^n\right)_{n\geq 0} \;;\; \left(\sqrt{n}\right)_{n\geq 0} \;;\; \left((-n)^n\right)_{n\geq 1}.$$

Proposition 3.14. Caractérisation de la borne sup/inf avec des suites

1. *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Alors, un majorant M de A est la borne supérieure de A si, et seulement si, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée d'éléments de A qui converge vers M.*
2. *Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Alors, un minorant m de A est la borne inférieure de A si, et seulement si, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée d'éléments de A qui converge vers m.*

Démonstration laissée en exercice.

3.3.3 Théorèmes généraux sur les limites de suites

Rappelons une proposition déjà vue en Terminale :

Proposition 3.15. Monotonie et convergence

1. *Toute suite majorée et croissante à partir d'un certain rang, est convergente dans $\mathbb{R}$.*
2. *Toute suite minorée et décroissante à partir d'un certain rang, est convergente dans $\mathbb{R}$.*
3. *Toute suite croissante à partir d'un certain rang et non majorée diverge vers $+\infty$.*
4. *Toute suite décroissante à partir d'un certain rang, et non minorée, diverge vers $-\infty$.*

Démonstration : À démontrer les item 1) et 3) en cours comme application de la notion de borne supérieure vue plus haut. La démonstration des item 2) et 4) est laissée en exercice.

Remarque : L'avantage (et l'inconvénient) de ce résultat est qu'il permet de prouver la convergence d'une suite numérique sans avoir à connaître la valeur de sa limite L potentielle. D'autres arguments seront nécessaires pour préciser la valeur de cette limite.

Voici deux autres propositions déjà vues en Terminale faisant intervenir des majorations de suites :

Proposition 3.16. Théorème des gendarmes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et un entier naturel n_0 tels que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait l'encadrement $v_n \leq u_n \leq w_n$.
Si les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite L, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite vaut également L.

Démonstration en exercice.

Proposition 3.17. Théorème de comparaison

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et un entier naturel n_0 tels que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait l'inégalité $v_n \leq u_n$.

1. *Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge également vers $+\infty$.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge également vers $-\infty$.*

Démonstration en exercice.

Rappels : Opérations élémentaires sur les limites de suites (Voir le tableau correspondant dans un manuel de Terminale).

Exemple : Après avoir vérifié qu'elles sont bien définies, déterminer les limites des suites réelles données ci-dessous :

$(n^2+4n+1)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)(3-n)\right)_{n\geq 1}$, $\left((n^2+4n+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n+3)\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2+4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
$(2\sqrt{n}-n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{n^2+3n}{3n^2+4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{n+2}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)_{n\geq 1}$.

Le tableau des opérations élémentaires sur les limites de suites vues en Terminale peut s'étendre et se généraliser par le théorème suivant qu'on admettra et qui sera démontrer ultérieurement en Analyse :

Proposition 3.18. Continuité et convergence
Soit a un réel et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si la fonction f est continue au point a et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers a, alors la suite des images $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $f(a)$.

Démonstration admise.

Exemple : $(|x_n|)_{\mathbb{N}}$, $(\cos(x_n))_{\mathbb{N}}$, $(\sqrt{x_n})_{\mathbb{N}}$, $(\ln|x_n|)_{\mathbb{N}}$, ...

3.3.4 Application aux suites itérées

Dans tout ce qui va suivre, D est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f désigne une application de D dans $\mathbb{R}$. Dans la pratique, le sous-ensemble D est souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 3.9. Suites itérées
Si f est une application de D dans $\mathbb{R}$, $a\in D$ un réel, on appellera ***suite des itérées successives de*** *f (ou* ***suite des itérations successives de*** *f, ou plus brièvement* ***suite itérée de*** *f)* ***de premier terme*** *$u_0=a$, toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général peut être défini par la donnée de $u_0\in\mathbb{R}$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.*

Remarque : Avec la notation de la composée de fonctions vue en Algèbre, on peut écrire, pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=(f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f)(u_0)$, où le facteur f apparaît n fois.

Remarque : La suite des itérées successives de f n'est pas nécessairement définie : cela dépend de la fonction f donnée et du premier terme u_0 donné.

Contre-exemple : Soit $D=\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ et $f: x\in D \mapsto f(x)=\dfrac{x}{3-2x}$. Les termes de la suite itérée de f de premier terme $u_0=\frac{81}{80}$, définie par

$$(I)\ \begin{cases} u_0=\frac{81}{80} \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n), \end{cases}$$

ne sont plus définis à partir du rang 4.

Proposition 3.19.
Si f est une application de D dans $\mathbb{R}$ telle que $f(D)\subseteq D$, alors la suite des itérées successives de f, de premier terme $u_0\in D$, est bien définie dans $\mathbb{R}$.

Représentation graphique des termes de la suite itérée de f.

Rappelons deux exemples classiques de suites itérées vues en Terminale avec leurs propriétés de convergence :

Proposition 3.20. Suites arithmétiques

1. *Soit r un réel donné. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérées successives de l'application*
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x + r \in \mathbb{R},$$
de premier terme u_0, est bien définie et est appelée ***suite arithmétique de raison** r **et de premier terme** u_0.*
2. *Le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors donné, pour tout entier naturel n, par $u_n = u_0 + n\,r$.*
3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet toujours une limite finie ou infinie.*
De façon précise, pour tout réel u_0,
   (a) *si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;*
   (b) *si $r = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers u_0 ;*
   (c) *si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.*

Proposition 3.21. Suites géométriques

1. *Soit q un réel donné. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérées successives de l'application*
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = qx \in \mathbb{R},$$
de premier terme u_0, est bien définie et est appelée ***suite géométrique de raison** q **et de premier terme** u_0.*
2. *Le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors donné, pour tout entier naturel n, par $u_n = u_0\,q^n$.*
3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut admettre ou non une limite.*
De façon précise, pour tout réel u_0,
   (a) *si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;*
   (b) *si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$;*
   (c) *si $q > 1$ et $u_0 = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers 0 ;*
   (d) *si $-1 < q < 1$, alors, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;*
   (e) *si $q = 1$, alors, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers u_0 ;*
   (f) *si $q \leq -1$, alors pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ non nul, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite ;*
   (g) *si $q \leq -1$ et $u_0 = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers 0.*

Les suites définies ci-dessous ont été déjà travaillées en Terminale S, mais dans le cadre de l'option Spécialité Maths, lorsqu'on étudie des puissances de matrices et des marches aléatoires :

Proposition 3.22. Suites arithmético-géométriques

Soit $a \neq 0$ et b deux réels.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérées successives de l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b \in \mathbb{R}$, de premier terme donné u_0, est bien définie et est appelée ***suite arithmético-géométrique de coefficients** a**,** b **et de premier terme** u_0.*

Proposition 3.23.
Soit $a \neq 0$, b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique de coefficients a, b et de premier terme donné u_0.

1. *Si $a = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de raison b et de premier terme u_0.*
2. *Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison a et de premier terme u_0.*
3. *Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, pour tout entier naturel n, le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit*

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n - \frac{b}{a-1}.$$

Exercice : Démonstration en exercice. Soit a et b deux réels tels que $a \neq 1$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par récurrence, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = au_n + b$.
Montrer qu'il existe une réel α tel que la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire l'expression en fonction de n du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie, par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 8.$$

1. Montrer qu'il existe une réel α tel que la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Donner l'expression du terme général de la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite le cas échéant.

Bibliographie.

[Math'x (Term. S)] : LE YAOUANG MARIE-HÉLÈNE, *Manuel de Terminale S, Enseignement de spécialité Maths*, niveau Terminale Scientifique, collection "Math'x", Éditions Didier, 470 pages, 2016.

[Math'x (Term. S), Spéc. Maths] : LE YAOUANG MARIE-HÉLÈNE, *Manuel de Terminale S, Enseignement de spécialité Maths*, niveau Terminale Scientifique, collection "Math'x", Éditions Didier, 200 pages, 2012.
15

[Monier] MONIER JEAN-MARIE, *Analyse I. Cours et 300 exercices corrigés*, Cours - tome 1, collection « J'intègre », prépas scientifiques, 1ère année MPSI-PCSI-PTSI, Dunod, 299 pages, 1998.

[Indice (Term. S)] : PONCY MICHEL, BONNAFET JEAN-LOUIS, RUSSIER MARIE-HÉLÈNE, *Manuel de Terminale S, Enseignement de spécialité Maths*, niveau Terminale Scientifique, nouvelle collection "Indice", Éditions Bordas, 440 pages, 2016.

[Indice (Term. S), Spéc. Maths] : PONCY MICHEL, BONNAFET JEAN-LOUIS, RUSSIER MARIE-HÉLÈNE, *Manuel de Terminale S, Enseignement de spécialité Maths*, niveau Terminale Scientifique, nouvelle collection "Indice", Éditions Bordas, 145 pages, 2016.

[Ramis-1] RAMIS JEAN-PIERRE, VARUSFEL ANDRÉ, ET ALII, *Mathématiques, Tout-en-un pour la licence, niveau 1*, Cours complet, 700 exercices, collection « Sciences Sup », Dunod, 2ème édition, 861 pages, 2013.