TERMINALE GENERALE - BACCALAUREAT BLANC

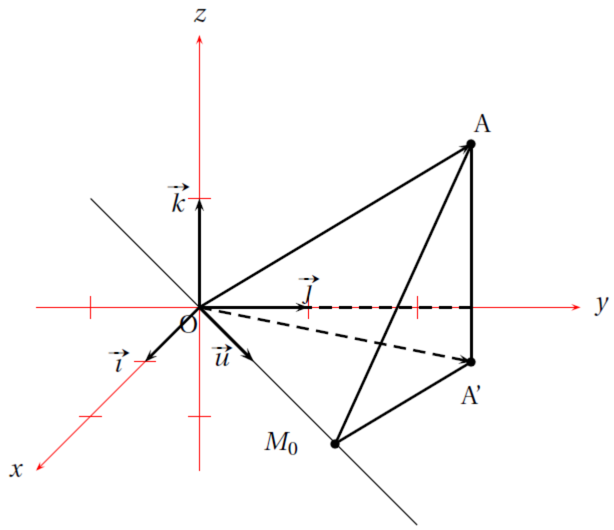
Exercice 3 5 points

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. La droite d passe par le point $O(0;0;0)$ et un vecteur directeur de d est $\vec{u}\,(1;1;0)$.
   Ainsi une représentation paramétrique de la droite d est $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On a $\overrightarrow{AM}\,(t-1;t-3;-2)$.
   Ainsi $AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 4 = 2t^2 - 8t + 14$
   (b) **Méthode 1 :** AM est minimal ssi AM^2 est minimal. Or $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$. Il s'agit donc de chercher la valeur de t pour laquelle $2t^2 - 8t + 14$ est minimal.
   Or $t \mapsto 2t^2 - 8t + 14$ est une fonction polynôme du second degré, représentée par une parabole tournée vers le haut car $a = 2$ est positif. Ainsi le minimum est atteint en $t = \alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2\times 2} = 2$.
   Ainsi AM est minimal pour $t = 2$, c'est-à-dire pour $M = M_0$ avec $M_0(2;2;0$.

   Remarque : On aurait aussi pu chercher le minimum de $t \mapsto 2t^2 - 8t + 14$ en passant par le signe de la dérivée...

   Méthode 2 : AM est minimale pour M le projeté orthogonal de A sur la droite d. Or M_0 est le projeté orthogonal de A sur la droite d si et seulement si $M_0 \in d$ et (AM_0) et d sont orthogonales.
   Or, pour $t = 2$, on retrouve les coordonnées du point M_0 dans la représentation paramétrique de d donc $M_0 \in d$.
   De plus, On a $\overrightarrow{AM_0}\,(1;-1;-2)$ donc $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1\times 1 + (-1)\times 1 + (-2)\times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$.
   Donc les droites (AM_0) et d sont bien orthogonales.

3. On a $\overrightarrow{AM_0}\,(1;-1;-2)$ donc $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1\times 1 + (-1)\times 1 + (-2)\times 0 = 1 - 1 + 0 = 0$.
   Donc les droites (AM_0) et d sont bien orthogonales.

   ATTENTION : Le produit scalaire de deux droites n'a pas de sens ! J'ai beaucoup vu $AM_0 \cdot d = \cdots$

On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.

4. M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O si et seulement si M_0 est le projeté orthogonal du point O sur le plan $(AA'M_0)$.
   M_0 appartient au plan $(AA'M_0)$. Il suffit donc de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est un normal au plan $(AA'M_0)$.
   Pour cela il suffit de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $(AA'M_0)$.
   Considérons par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AM_0}\,(1;-1;-2)$ et $\overrightarrow{A'M_0}\,(1;-1;0)$.
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   De plus, $\overrightarrow{AM_0} \cdot \overrightarrow{OM_0} = 0$ car les droites (AM_0) et d sont orthogonales et $\overrightarrow{OM_0}$ est un vecteur directeur de d.
   Et $\overrightarrow{OM_0}\,(2;2;0)$ donc $\overrightarrow{A'M_0} \cdot \overrightarrow{OM_0} = 2 - 2 + 0 = 0$.
   Ainsi M_0 est bien le projeté orthogonal du point O sur le plan $(AA'M_0)$.

   ATTENTION : Calculer les longueurs OA, OA' et OM_0 n'est pas suffisant pour assurer que OM_0 est la distance minimale entre le point O et le plan $(AA'M_0)$. On ne prouve pas avec des exemples ... Si on reste sur cette idée, il faudrait prouver que quelque soit le point N du plan $(AA'M_0)$, on a $OM_0 \leqslant ON$.

5. Pour calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$, on peut considérer le triangle $AA'M_0$ comme base et OM_0 comme hauteur. En effet on a prouvé en question 4 que le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est normal au plan $(AA'M_0)$.
   Le triangle $AA'M_0$ est rectangle en A' car $\overrightarrow{A'M_0} \cdot \overrightarrow{AA'} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times (-2) = 0$
   Et on a $A'M_0 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, $AA' = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$ et $OM_0 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
   Ainsi $\mathcal{B} = \dfrac{A'M_0 \times AA'}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \times 2}{2} = \sqrt{2}$ et $h = 2\sqrt{2}$
   D'où $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \dfrac{4}{3}$
   Remarque : on aurait aussi pu choisir OM_0A' comme base et AA' comme hauteur.