TERMINALE GENERALE - BACCALAUREAT BLANC

12 février 2024

EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE Mathématiques

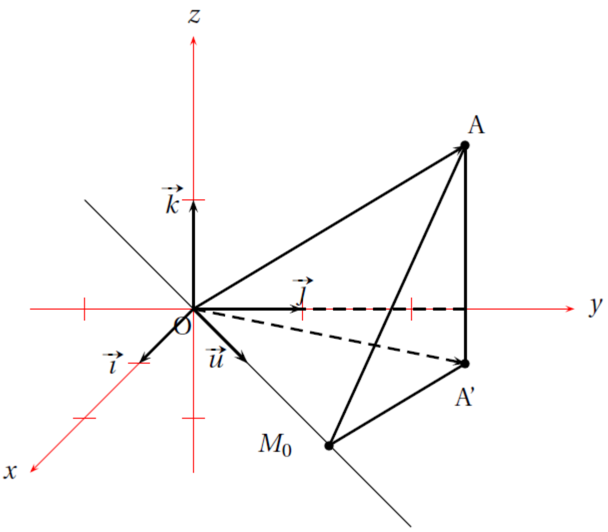
Exercice 3 5 points

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

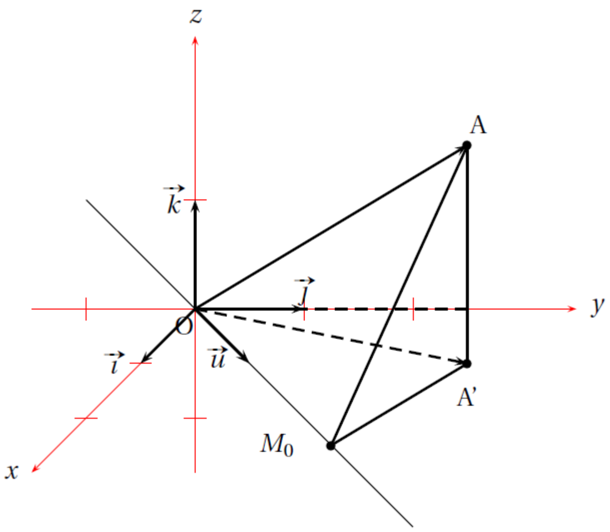
On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.

4. Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Corrigé de l'exercice 3

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère

- le point A de coordonnées (1 ; 3 ; 2),
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



1. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \iff \overrightarrow{OM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& 0\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
2. (a) De $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}t-1\\t-3\\0-2\end{pmatrix}$, on calcule :
   $AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 = 2t^2 - 8t + 14$.
   (b) $2t^2 - 8t + 14 = 2\left(t^2 - 4t + 7\right) = 2\left[(t-2)^2 - 4 + 7\right] = 2\left[(t-2)^2 + 3\right]$.
   La plus petite valeur de ce trinôme est obtenue quand le carré est nul, soit pour $t = 2$.
   On a : $2t^2 - 8t + 14 \geqslant 6$, soit $AM^2 \geqslant 6 \Rightarrow AM \geqslant \sqrt{6}$.
   La plus petite distance est $AM_0 = \sqrt{6}$ avec $M_0(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$.
3. On a : $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
   On a : $\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. $\overrightarrow{A'M_0}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{A'M_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et donc on en déduit :
   $\overrightarrow{A'M_0}\cdot\vec{u} = 1\times 1 + (-1)\times 1 + 0\times 0 = 0$ donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{A'M_0}$.
   Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\left(AA'M_0\right)$, les vecteurs $\overrightarrow{AM_0}$ (question précédente) et $\overrightarrow{A'M_0}$ (comme on vient de l'établir), donc la droite (d) est orthogonale au plan $\left(AA'M_0\right)$. Le point M_0 est donc le projeté orthogonal de O sur le plan $\left(AA'M_0\right)$, donc OM_0 est la distance la plus courte du point O au plan $\left(AA'M_0\right)$.
5. Aire de la base $AA'M_0$: on a $AA' = 2$ et $A'M_0^2 = (2-1)^2 + (2-3)^2 + 0^2 = 1 + 1 = 2$. D'où $A'M_0 = \sqrt{2}$.
   On a donc $\mathcal{A}\left(AA'M_0\right) = \dfrac{2\times\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
   D'autre part : $OM_0^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, d'où $OM_0 = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2} = h$.
   Finalement $V = \dfrac{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4}{3}$.

En question 4), la plupart des élèves ont calculé les distances OM_0, OA' et OA pour en arriver à la conclusion que M_0 était bien le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O.
Il suffisait en fait de prouver que M_0 est le projeté orthogonal du point O sur le plan $(AA'M_0)$.