Les arithmétiques de Diophante

Certains de nos élèves peuvent avoir des difficultés à rentrer dans l'algèbre. L'étude des obstacles épistémologiques peut nous permettre de trouver des pistes pour les y aider. Nous pouvons observer que les élèves ne maîtrisant pas les nombres ont souvent des difficultés à passer au calcul algébrique. Nous entendons par la maîtrise des nombres non seulement leur désignation, mais aussi les différentes propriétés sur les nombres, la maîtrise des techniques opératoires et la reconnaissance des problèmes que les différentes opérations permettent de résoudre.

Dans notre enseignement, l'arithmétique et l'algèbre sont souvent enseignés dans des chapitres séparés, et pourtant la frontière entre les deux n'est pas si marquée. En effet pour faire du calcul algébrique nous avons besoin d'une certaine maîtrise de l'arithmétique, et les démonstrations en arithmétique sont souvent faites à l'aide de l'algèbre. Par exemple, dans nos classes quand nous voulons montrer que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5, nous écrivons :
Soient N_1 et N_2, deux multiples de 5.
Il existe donc deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que $N_1 = 5n_1$ et $N_2 = 5n_2$.
Donc $N_1 + N_2 = 5n_1 + 5n_2 = 5.(n_1 + n_2)$
Or $n_1 + n_2$ est un entier naturel, donc $N_1 + N_2$ est un multiple de 5.
Dans cet exemple l'utilisation de l'algèbre au service de l'arithmétique est incontestable tant dans l'écriture de la démonstration que dans l'utilisation de la règle de distributivité.
Un autre exemple serait la façon dont nous écrivons les nombres pairs ($2n$) et impairs ($2n + 1$). Or nous savons que l'utilisation de l'écriture des nombres pairs et impairs n'est pas une évidence pour les élèves. À quel moment le travaille-t-on en classe et comment ?

Dans son article *Diophante et l'agèbre pré-symbolique*[4], Luis RADFORD souligne que « la théorie arithmétique de Diophante, qui nous laisse voir une des facettes historiques de l'émergence de l'algèbre, peut être considérée par rapport à l'algèbre de Viète comme une algèbre pré-symbolique ». Nous pouvons donc nous demander si l'étude des textes de Diophante[2] peut nous venir en aide pour mettre du lien dans nos classes entre arithmétique et algèbre, et si elle peut être un moyen d'accompagner l'élève dans la construction du savoir dans ces deux domaines des mathématiques en les travaillant simultanément.

Après l'explicitation de cadres théoriques dans lesquels nous allons nous placer pour analyser un exercice comprenant une perspective historique et de la manipulation, nous étudierons des activités menées en classe de cinquième. Dans chacune d'elle, nous proposerons de manipuler (à l'aide de jetons) afin de « faire vivre » des propriétés sur les nombres. La manipulation peut permettre aux élèves de mieux se les approprier.

1 Cadres théoriques pour analyser les activités :

1.1 Cadre théorique pour analyser l'apport historique dans les activités

Lors de l'analyse des activités proposées, afin de comprendre l'enjeu de l'apport de l'histoire des mathématiques dans notre cours, nous allons utiliser l'identification des tâches selon la typologie SaMaH (activités Spécifiques a-Mathématiques et a-Historiques) de Thomas de VITTORI [5]. Afin « de rendre compte de la richesse potentielle des interactions entre mathématiques et leur histoire », l'auteur propose le modèle SaMaH comme focale d'observation.

Il distingue trois type de tâches :

Les tâches a-mathématiques (aM). Ce sont des tâches faisant appel à un contenu historique sans prendre en compte la dimension mathématique, comme par exemple l'anecdote racontée, ou la recherche documentaire.

Les tâches a-historiques (aH). Nous retrouvons ce type de tâche dans une activité mathématique sans lien explicite avec son histoire.

Les tâches spécifiques (S). Lors de l'activité, les élèves sont confrontés·es aux deux dimensions, mathématique et historique, dont l'interaction est explicite. Par exemple si nous faisons tracer des cercles à l'aide d'une ficelle en sixième, la partie historique sur les tracés indiens appelés Sultbasutras permet de mieux appréhender la définition du cercle, qu'une simple utilisation du compas.

Au cours d'une même séance, les trois éléments S, aM et aH pourront être présents, mais selon l'auteur, « La typologie SaMaH nous permettra de rendre compte de la richesse et de la complexité » de nos activités.

1.2 Cadre théorique pour analyser l'apport de la manipulation dans les activités

Jerome Bruner [1] lie la transmission du savoir aux « différents modes de représentation » de ce savoir des individus. Selon lui, l'être humain dispose de trois modes de représentation du savoir pour apprendre : le mode « enactif », le mode« iconique » et le mode « symbolique ».

Le mode enactif. C'est le fait d'apprendre par l'action ou la manipulation. Connaître c'est savoir faire, et donc en premier lieu nous avons un verbe d'action. Ce mode sensori-moteur, caractérise le rôle de la manipulation dans le développement cognitif.

Le mode iconique. En deuxième lieu nous verbalisons les manipulations pour en créer des images. Dans cette phase, on se représente mentalement ce que l'on a manipulé.

1. Jerome Seymour Bruner (1915-2016) est un psychologue américain. Il a travaillé sur la « catégorisation » en jeu au sein d'une activité cognitive dans *A Study of Thinking* en 1956, le développement de l'enfant et la psychologie de l'éducation, entre autre.

Le mode symbolique. Enfin, nous encodons avec des symboles. C'est à ce moment que l'abstraction va permettre de raisonner, d'expliquer ce que l'on a fait mais aussi de prévoir ce que l'on fera.

Jerome Bruner précise que ces trois modes de représentation ne sont pas liés à l'âge de l'apprenant. Il précise que l'apprentissage se fait par la navigation entre ces trois modes, et que c'est le conflit entre deux modes qui stimule l'apprentissage.

Nous pouvons rapprocher ces travaux des 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques du rapport Villani-Torossian de 2018. Nous pouvons lire dans la mesure n°5 :

5 - Les étapes d'apprentissage
Dès le plus jeune âge mettre en œuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur :

— la manipulation et l'expérimentation ;
— la verbalisation ;
— l'abstraction.

Les trois modes de Bruner sont donc un modèle théorique qui décrit les niveaux d'abstraction, et qui sont la base de la démarche d'apprentissage manipuler-verbaliser-abstraire, que l'on peut présenter ainsi :

Manipuler *(étape concrète)*	**Verbaliser** *(imager)*	**Abstraire** *(conceptualiser et abstraire)*
L'élève explore le concept en manipulant des supports (concrets ou virtuels) dans une activité ciblée.	Le concept est représenté avec une première symbolisation. L'élève peut verbaliser et communiquer sur cette représentation imagée.	Le concept est exprimé avec des symboles mathématiques. L'élève peut l'expliquer avec un langage mathématique.

1.3 Conclusion

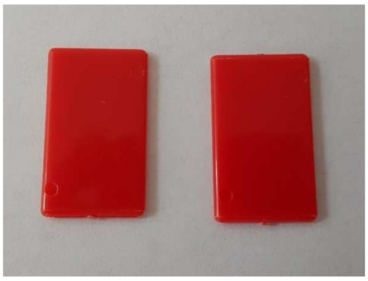
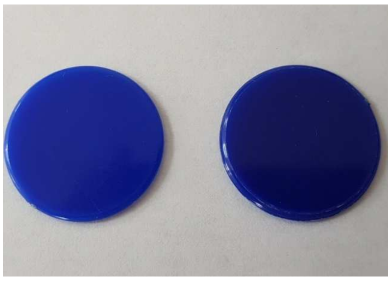
Nous allons donc utiliser ces deux focales d'observation pour comprendre en quoi l'histoire des mathématiques et la manipulation peuvent aider les élèves à construire la notion de nombre, travailler la démonstration en arithmétique et préparer l'arrivée de l'algèbre.

Les analyses a priori et a posteriori des activités qui suivent ne sont pas complètes. En effet, lors de l'atelier nous avons présenté un début d'expérimentation. Seules les deux premières activités ont été faites en classe.

2 Des activités :

Matériel :

Prévoir des jetons de jeux : des rectangles qui représenteront l'arithme et des disques sur lesquels on écrira des nombres.

Pour les jetons, on peut aussi les imprimer et les plastifier (voir ceux proposés en annexe).

Prévoir des feuilles de brouillon sur lesquelles les élèves vont pouvoir déplacer les jetons et écrire.

Objectifs :

- Arithmétique : raisonner sur les nombres ; résoudre des problèmes.
- Histoire des mathématiques : lire des textes historiques.
- Préparer l'arrivée de l'algèbre.

2.1 Première activité :

Matériel :

Prévoir des jetons : 40

Énoncé projeté au tableau :

Problème 1

Trouver deux nombres dont la somme est 100 et la différence est 40.

Stratégies probables des élèves :

- Certains élèves pourraient tâtonner en partant de deux nombres dont la somme est 100, et en cherchant à avoir une différence de 40 :
  60 − 40 = 20, la différence e
  80 − 20 = 60, la différence e

70 − 30 = 40, c'e
Le

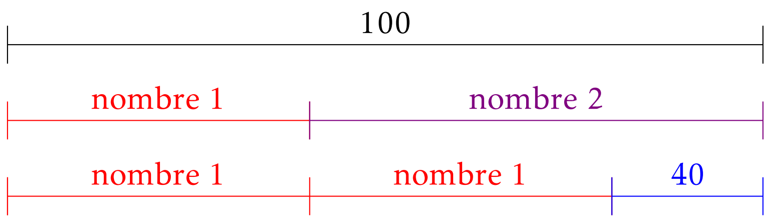
- D'autres élèves pourraient tâtonner en partant de deux nombres dont la différence est 40, et en cherchant à avoir une somme égale à 100 :

  60 + 20 = 80, la somme e

  80 + 40 = 120, la somme e

  70 + 30 = 100, c'e
  Le

- On peut s'attendre à une résolution à l'aide d'un schéma :



On peut en déduire que deux fois le nombre 1 vaut 60. Donc le nombre 1 vaut 30. Le

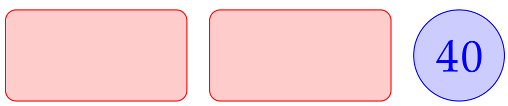
Proposition de l'enseignant·e lors de la correction avec élèves :

L'enseignant·e propose une correction avec les jetons de jeu pour que les élèves manipulent et soient mieux préparés·es à la lecture du texte de Diophante. Cette démonstration se fait par un jeu de questions/réponses avec la classe. Les élèves ont les jetons à leur disposition et les manipulent avec l'enseignant·e.
Voici le bilan de ce dialogue :

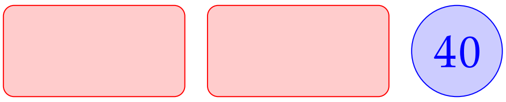
Modélisons le plus petit nombre cherché par le jeton rouge :

La différence entre les deux nombres est 40, donc le plus grand nombre est la somme du plus petit et de 40. On peut donc représenter le plus grand nombre par :

Donc la somme des deux nombres est l'ensemble des jetons suivant :

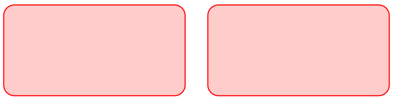


Or la somme des deux nombres est 100 :



vaut 100

Si en additionnant les deux jetons rouges avec 40, on obtient 100, on peut donc connaître la valeur de deux jetons rouges :



vaut 60

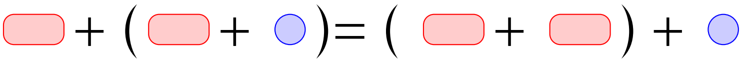
Ainsi :

vaut 30

On en déduit que les nombres cherchés sont 30 et 70 (30+40).

Remarque :

Dans cette démonstration, une propriété sur les nombres est passée sous silence : l'associativité de l'addition. En effet, on a besoin de :



Même si elle est intuitive dans la manipulation, on peut se poser la question suivante : à quel moment de la scolarité, l'élève apprend cette propriété ? À quel moment l'associativité est-elle institutionnalisée ?

Trace écrite :

L'addition est associative, c'est à dire :
pour tous nombres a, b et c, on a : $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Énoncé distribué aux élèves :

Texte historique n°1

Voici la traduction d'un texte de Diophante[a], mathématicien du III$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère, pris dans son livre I des Arithmétiques :

I

Partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée.

Que le nombre donné soit 100, et que la différence soit 40 unités ; trouver les nombres.

Posons que le plus petit nombre est 1 arithme (1) ; donc, le plus grand nombre sera 1 arithme plus 40 unités. En conséquence, la somme des deux nombres devient 2 arithmes, plus 40 unités. Or, les 100 unités données sont cette somme ; donc, 100 unités sont égales à 2 arithmes plus 40 unités. Retranchons les semblables des semblables, c'est-à-dire 40 unités de 100, et, de même, 40 unités de 2 arithmes plus 40 unités. Les deux arithmes restants valent 60 unités, et chaque arithme devient 30 unités.

Revenons à ce que nous avons posé : le plus petit nombre sera 30 unités ; tandis que le plus grand sera 70 unités, et la preuve est évidente (2).

Questions :

1. Comparer la méthode de Diophante avec une des méthodes vues en classe pour résoudre le problème.
2. Pour expliquer comment « *partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée* », Diophante utilise un exemple. Aurait-il pu choisir un autre exemple ?

a. Diophante d'Alexandrie - Les six livres arithmétiques - traduit par Paul Ver Eecke - Librairie Albert Blanchard - 1959.

Réponses attendues des élèves :

1. Diophante utilise la même méthode que celle avec les jetons. Au lieu de prendre un jeton, il utilise l'arithme pour désigner le plus petit nombre.
2. Pour tous les nombres entiers nous pouvons utiliser cette méthode, à condition que la somme donnée soit supérieure à la différence donnée.

Identification des tâches selon la typologie SaMaH :

La résolution du problème 1 est de type aH. Ici le texte historique n'est pas encore donné.

Lorsque nous passons à la deuxième partie de l'activité, l'élève doit se poser la question de la généricité de la méthode, c'est à dire, peut-on utiliser cette méthode avec tous les nombres ? De plus la lecture de ce texte fait entrer les élèves dans un raisonnement qu'ils n'ont pas l'habitude de mener. L'arrivée de l'arithme peut être déstabilisante au départ, mais elle permet d'écrire un raisonnement sans utiliser la manipulation. On entraîne donc les élèves à passer de la démonstration par la manipulation à la démonstration écrite. Ce travail de type S doit permettre aux élèves de se construire des représentations mentales des nombres et d'être guidés vers le chemin de l'algèbre.

2.2 Deuxième activité :

Énoncé projeté au tableau :

Problème 2

Trouver deux nombres dont la somme est 60 et l'un des deux nombres est le triple de l'autre.

L'enseignant·e laissera les élèves résoudre ce problème avec la méthode de leur choix. Forts·tes de l'expérience de la première activité, on peut imaginer que les élèves ne choisissent pas tous·tes la même procédure, et que cerstains·es élèves utilisent les jetons mis à leur disposition. Lors de la correction on pourra prendre le temps d'écouter les groupes les présenter.

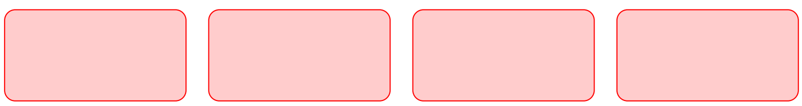
Si certains d'entre eux, utilisent l'arithme, on ne les fera pas passer à l'oral. Pendant la deuxième partie de l'activité, ils finaliseront leur texte et deviendront personnes ressources pour les autres groupes.

La méthode avec les jetons peut se résumer de la façon suivante :

Modélisons le plus petit nombre cherché par le jeton rouge :

Le second nombre est le triple de l'autre. On peut donc représenter le plus grand nombre par :

La somme des deux nombres est 60, donc :



vaut 60

Ainsi :

vaut 15

Les deux nombres cherchés sont 15 et 45 (3×15).

On peut penser que ce deuxième problème ne posera aucun soucis aux élèves.

Deuxième partie de l'activité :

Énoncé projeté au tableau :

Problème 2

Écrire le texte qu'aurait pu écrire Diophante pour résoudre le problème n° 2.

Texte historique n°2

II

Il faut partager un nombre proposé en deux nombres qui soient dans un rapport donné ([3]).

Proposons donc de partager 60 en deux nombres qui soient dans le rapport du triple.

Posons que le plus petit nombre est 1 arithme ; donc le plus grand nombre sera 3 arithmes, et ainsi le plus grand nombre est le triple du plus petit nombre. Il faut encore que la somme des deux nombres soit 60 unités. Mais la somme des deux nombres est 4 arithmes ; donc, 4 arithmes sont égaux à 60 unités, et l'arithme est donc 15 unités. En conséquence, le plus petit nombre sera 15 unités, et le plus grand 45 unités ([1]).

Ce texte est lu aux élèves après la lecture de ceux qu'ils·elles ont produit.

Identification des tâches selon la typologie SaMaH :

La résolution du problème 2 est soit de type S si les élèves réinvestissent l'arithme, soit de type aH.

Dans la deuxième partie, les élèves écrivent à la façon de Diophante. Cette tâche leur permet de travailler leur rapport au texte de Diophante et de gagner en compréhension lors des lectures suivantes. On continue le travail entamer dans la première activité qui est d'entraîner les élèves à passer de la démonstration par la manipulation à la démonstration écrite. Ce travail de type S doit permettre aux élèves de se construire des représentations mentales des nombres et de les guider vers le chemin de l'algèbre.

2.3 Troisième activité :

Matériel :

Prévoir des jetons : 4 et 20

Organisation spatiale :

- La classe est divisée en deux groupes.
- Chaque groupe a un texte différent de l'autre.
- Un élève de chaque groupe présentera son travail à l'oral.

Énoncé projeté au tableau :

Problèmes 3 et 4

1. Lire le texte de Diophante.
2. Réécrire le deuxième paragraphe avec vos mots.
3. Faire la démonstration proposée par Diophante avec les jetons.

Lors de la correction, on pourra faire remarquer que pour trouver 19 et 76, la méthode par tâtonnement peut être relativement longue.

Voici les textes donnés aux élèves :

Texte historique n°3

III

Partager un nombre proposé en deux nombres qui soient dans un rapport à une différence donnée près ([2]).

Proposons donc de partager 80 en deux nombres, de manière que le plus grand soit le triple du plus petit en l'excédant en outre de 4 unités.

Que le plus petit nombre soit 1 arithme. Dès lors, le plus grand nombre est 3 arithmes plus 4 unités, et le plus grand nombre est ainsi le triple du plus petit, qu'il excède encore de 4 unités. Nous voulons aussi que la somme des deux nombres soit égale à 80 unités. Or, la somme de ces deux nombres est 4 arithmes plus 4 unités ; donc 4 arithmes plus 4 unités sont égaux à 80 unités. Retranchons les semblables des semblables ; les 76 unités restantes sont donc égales à 4 arithmes, et l'arithme devient 19 unités.

Revenant aux choses posées, le plus petit nombre sera donc 19 unités, et le plus grand sera 61 unités ([3]) ([4]).

Texte historique n°4

IV

Trouver deux nombres dans un rapport donné, tels que leur excédent soit donné aussi [1].

Proposons que le plus grand nombre soit le quintuple du plus petit, et que l'excédent de ces nombres forme 20 unités.

Posons que le petit nombre est 1 arithme ; donc le grand sera 5 arithmes. Nous voulons finalement que 5 arithmes excèdent 1 arithme de 20 unités. Or, leur excédent est 4 arithmes, lesquels devront être égaux à 20 unités. Dès lors, le petit nombre sera 5 unités, et le grand sera 25 unités ; ce qui établit que le grand nombre est le quintuple du petit, et que leur différence forme 20 unités [2].

2.4 Quatrième activité :

Prérequis :

- Définitions de multiples et diviseurs.
- Prendre une fraction d'un nombre.

Matériel :

Prévoir des jetons : 30

Énoncé projeté au tableau :

Problème 5

Trouver deux nombres dont la somme est 100 et tels que le tiers du premier nombre plus le cinquième du second soit 30.

Stratégies probables des élèves :

La résolution du problème avec les jetons n'est nettement pas intuitive. Effectivement Dans ce problème l'arithme n'est plus un des deux nombres, mais une fraction de l'un des deux nombres. Après des essais non concluant avec les jetons, les élèves pourraient avoir recours à une méthode par tâtonnement.

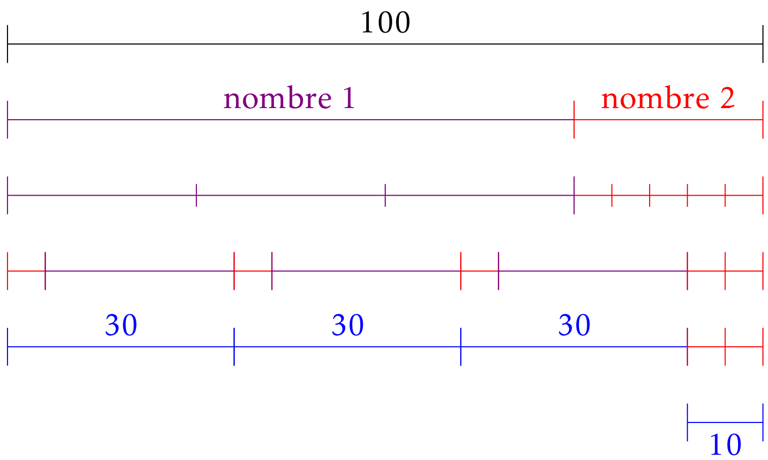
- $50+50=100$. $50\div3\approx16{,}66$ et $50\div5=10$. $16{,}66+10\neq30$.
  $49+51=100$. $49\div3\approx16{,}33$ et $51\div5=10{,}2$. $16{,}33+10{,}2\neq30$.
  $48+52=100$. $48\div3=16$ et $52\div5=10{,}4$. $16+10{,}4\neq30$.
  ....

75+25 =100. 75÷3=25 et 25÷5=5. 25+5=30.
Ainsi, le nombre 2 vaut 25 et le nombre 1 vaut 75.

On peut se demander si les élèves vont restreindre leur recherche aux nombres divisibles par 3 pour le nombre 1 et à ceux divisibles par 5 pour le nombre 2. Chercher des nombres ayant pour diviseur 3 (resp. 5) revient à chercher des multiples de 3 (resp. 5). Une discussion pourra être engagée avec les élèves autour de ce point, et on pourra envisager la trace écrite suivante :

Pour tout nombre N, 5 est un diviseur de N équivaut à N est un multiple de 5.

- Avec des segments :



Donc le cinquième du nombre 2 vaut 5 et le tiers du nombre 1 vaut 25.
Ainsi, le nombre 1 vaut 75 et le nombre 2 vaut 25.

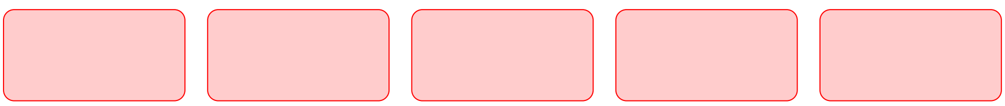
- Avec des jetons : nous pouvons prévoir que les élèves rencontrent des difficultés avec la démonstration avec les jetons. En effet, dans ce problème, si on choisit de représenter un des deux nombres par le jeton, nous avons des difficultés à en prendre le cinquième ou le tiers. On va donc représenter soit le tiers du nombre 1 soit le cinquième du nombre 2 par un jeton. En laissant manipuler les élèves on espère qu'ils·elles fassent le « bon choix ».

Proposition de l'enseignant·e lors de la correction avec élèves :

Après un retour à la manipulation des élèves, voici une proposition de correction.

Modélisons le cinquième du second nombre par le jeton rouge :

Le second nombre est alors représenté par :



Le tiers du premier nombre est 30 auquel on enlève

Pour ajouter le premier nombre il faut donc :

Ajouter 30 30 30 et enlever

Donc la somme des deux nombres est :

30 30 30 vaut 100

Donc :

vaut 10

Ainsi :

vaut 5

On en déduit que le premier nombre est 25 (5×5),
et le deuxième nombre 75 $(90 - 3 \times 5)$.

Remarque :

Dans cette démonstration, une propriété sur les nombres est utilisée : la distributivité.
En effet, on dit que :

$$3\,(\bigcirc - \square) = 3\bigcirc - 3\,\square$$

On pourrait envisager la trace écrite suivante :

Pour tous nombres a et b, on a : $3 \times (a + b) = 3 \times a + 3 \times b$.
Plus généralement :
Pour tous nombres a, b et k, on a : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.

Énoncé distribué aux élèves :

Texte historique n°5

Résoudre le problème à la manière de Diophante : comparer la méthode de Diophante avec la méthode des jetons.

V

Partager un nombre proposé en deux nombres de manière que, si des fractions différentes données de chacune des parties sont additionnées, elles forment un nombre donné ([3]).

Le nombre donné doit toutefois être tel qu'il soit compris entre les deux nombres que l'on obtient en prenant les fractions données différentes du nombre proposé au début ([4]).

Dès lors, proposons de partager 100 en deux nombres, de manière que le tiers du premier nombre et le cinquième du second additionnés ensemble forment 30 unités.

Posons que le cinquième du second nombre est 1 arithme, et ce second nombre sera donc 5 arithmes. Dès lors, le tiers du premier nombre sera 30 unités moins 1 arithme, et ce premier nombre sera donc 90 unités moins 3 arithmes. Nous voulons finalement que les deux nombres additionnés forment 100 unités. Or, les deux nombres additionnés forment 2 arithmes plus 90 unités, lesquels devront égaler 100 unités. Retranchons les semblables des semblables, et les 10 unités restantes sont donc égales à 2 arithmes ; [donc l'arithme sera 5 unités] ([1]).

Revenons à ce que nous avons posé. On a posé que le cinquième du second nombre est 1 arithme, c'est-à-dire 5 unités ; donc le second nombre sera 25 unités. Or, le tiers du premier nombre est 30 unités moins 1 arithme, c'est-à-dire 25 unités ; donc, le premier nombre sera 75 unités. Il est donc établi que le tiers du premier nombre plus le cinquième du second nombre est 30 unités, et que la somme des nombres forme le nombre proposé ([2]).

Trace écrite :

Les phrases suivantes sont équivalentes :

- 5 divise N.
- 5 est un diviseur de N.
- N est un multiple de 5.
- Il existe un nombre entier a tel que $N = 5 \times a$.

2.5 Évaluation du dispositif

Énoncé projeté au tableau :

Questions

1. Comment peut-on écrire qu'un nombre est un multiple de 7 ?
2. Comment peut-on écrire qu'un nombre est divisible par 11 ?
3. Comment peut-on écrire qu'un nombre est pair ?
4. Comment peut-on écrire qu'un nombre est impair ?

Objectif visé :

Au début du lycée, lorsque nous faisons des démonstrations en arithmétique, les élèves n'ont pas le réflexe de passer du registre de la langue naturelle au registre de l'algèbre pour effectuer des preuves sur des propriétés arithmétiques des multiples ou de la parité des nombres. Cet exercice permet d'évaluer les élèves sur ce changement de registres.

Réponses probables des élèves :

Les élèves peuvent écrire une autre formulation en restant dans le registre de la langue naturelle. Les élèves peuvent changer de registre et essayer de passer dans celui de l'algèbre.
Si des élèves changent de registre et passent dans le registre algébrique pour répondre aux questions, on aura rempli notre objectif.

Proposition de l'enseignant·e lors de la correction :

Lors de la correction, on pourra aider les élèves à verbaliser pour abstraire, et les inviter à changer de registre.

En effet un multiple de 7 peut se manipuler avec l'utilisation de 7 jetons. Ce nombre est donc 7 fois un certain nombre. Il existe donc un entier a tel que ce nombre peut s'écrire $7 \times a$

1. Comment peut-on écrire qu'un nombre est un multiple de 7 ?
   « N est un multiple de 7 » revient à dire « il existe un entier naturel a, tel que $N = 7 \times a$ » .
2. Comment peut-on écrire qu'un nombre est divisible par 11 ?
   « N est divisible par 11 » revient à dire « il existe un entier naturel a, tel que $N = 11 \times a$ ».
3. Comment peut-on écrire qu'un nombre est pair ?
   « N est pair » revient à dire « il existe un entier naturel a, tel que $N = 2 \times a$ ».
4. Comment peut-on écrire qu'un nombre est impair ?
   « N est impair » revient à dire « il existe un entier naturel a, tel que $N = 2 \times a + 1$ ».

3 Analyse a posteriori des activités :

Les activités ont été menées dans une classe de 5ème de niveau relativement faible. La distributivité n'avait pas encore été abordée. Les élèves étaient en îlot de quatre. Ils·elles sont bien rentrés·es dans les activités et ont été dans la recherche pendant toute la durée du travail.

3.1 Première activité :

À la lecture de la consigne, les élèves ont trouvé l'énoncé difficile. Le mot « différence » a du être expliqué, puis les élèves se sont mis au travail. Contrairement à ce qui était attendu, aucun·e d'entre eux·elles n'a procédé autrement que par tâtonnement. L'une des six compétences mathématiques est « CHERCHER ». C'est dans cette compétence que les élèves travaillent le tâtonnement. On peut voir que chercher par essais/erreur n'est pas forcément fait de façon raisonnée par tous les élèves et en analysant les productions des élèves on peut évaluer leur façon de raisonner.

Figure 1 On peut voir que l'élève *A* n'a fait qu'un seul essai, sans doute par ce que la solution est assez facile à trouver et que sa connaissance des nombres lui a permis d'aller rapidement à la solution.

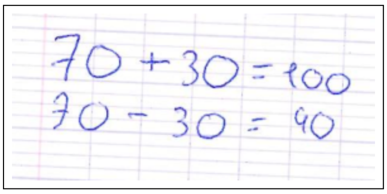


Figure 1 – élève *A*

Figure 2 La plus part des élèves ont procédé comme l'élève *B*.

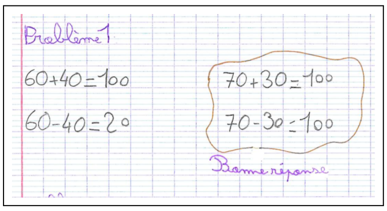


Figure 2 – élève *B*

Figure 3 Dans la recherche des nombres, il y avait deux conditions à tester. L'une d'elle était que la différence entre ces deux nombres valait 40. On peut être surpris que des élèves commencent leurs essais par 50 et 50 dont la différence n'est clairement pas 40.

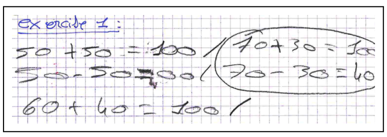


Figure 3 – élève *C*

Figure 4 Ici, on voit que pour les deux premiers essais, l'élève n'a écrit qu'un calcul de vérification. Sans doute que le deuxième n'a pas été écrit car il a rapidement vu que la deuxième condition n'était pas respectée. Là encore l'élève D ne fait pas un tâtonnement raisonné. Il commence à tester 100 et 40 alors que la somme est 100, puis 50 et 50 alors que la différence est 40. Dans son troisième essai il teste deux nombres supérieurs à 100.

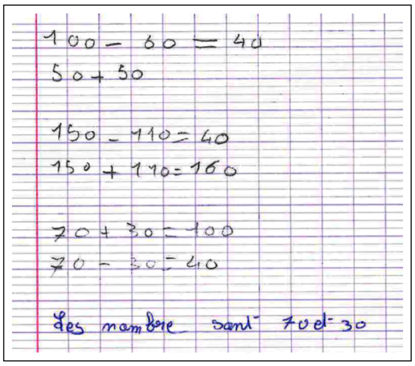


Figure 4 – élève D

Pour conclure, la recherche par tâtonnement n'est donc pas faite de façon raisonnée par la plupart des élèves, et ceci doit être travaillé dans la compétence « CHERCHER ». Lors de la mise en commun au tableau, ou de la correction, il faut que l'enseignant·e demande de façon explicite le choix des essais. Une discussion doit être abordée avec les élèves. Nous devons travailler avec eux le tâtonnement pour travailler la compétence « CHERCHER ».

Lors de la correction une élève a posé la question suivante « Nous avons trouvé 70 et 40 comme solution, mais on ne sait pas si d'autres nombres marchent ? ». Voici la réponse proposée par un autre élève de la classe : « On a trouvé deux nombres, maintenant si on en diminue un, l'autre augmente, et donc on s'éloigne de 40 ». Ce raisonnement de la part d'un élève montre à quel point le tâtonnement est constructif et constitutif du raisonnement lorsque il est fait avec de l'observation et de façon réfléchie.
De plus, si on considère que le tâtonnement est de la manipulation, nous pouvons observer ici que l'élève qui vient de faire cette démonstration a manipulé (en tâtonnant), puis verbalisé et est rentré dans l'abstraction.
La question que l'on peut se poser est : peut-on considérer que le tâtonnement est de la manipulation ? Je pense qu'effectivement, l'élève qui tâtonne est dans une manipulation non-sensitive, mais une manipulation des nombres. On manipule les nombres quand on les décompose en produit, en somme, etc. Cette manipulation, qui n'est pas le fait d'actionner à l'aide de la main, passe quand même par l'écriture. Un élève qui cherche est acteur de son apprentissage et dans la recherche on peut donc retrouver les trois mode de Bruner. Tâtonner en serait alors le mode enatif.

Nous avons ensuite proposé la correction avec les jetons.

La lecture du texte de Diophante s'est faite en classe entière avec l'explication pas à pas, car le texte leur faisait peur. Cette lecture fût accompagnée de la manipulation avec les jetons. Ici la manipulation fût donc un appui pour comprendre le texte.

Les élèves étaient attentifs et ont semblé comprendre le raisonnement de Diophante.

3.2 Deuxième activité :

Première partie de l'activité :

L'énoncé projeté au tableau, les élèves se sont mis·es en activité. Certains·es ont adopté la méthode avec les jetons, d'autres sont restés·es sur le tâtonnement. On peut observer que les élèves qui ont manipulé avec les jetons ont trouvé la réponse assez rapidement.

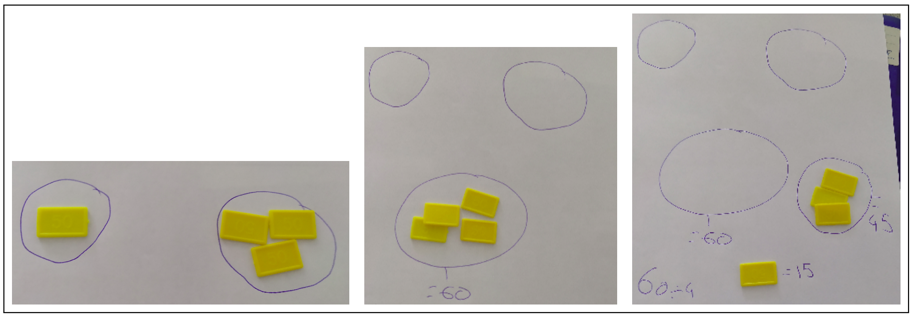


Figure 5 – élève E

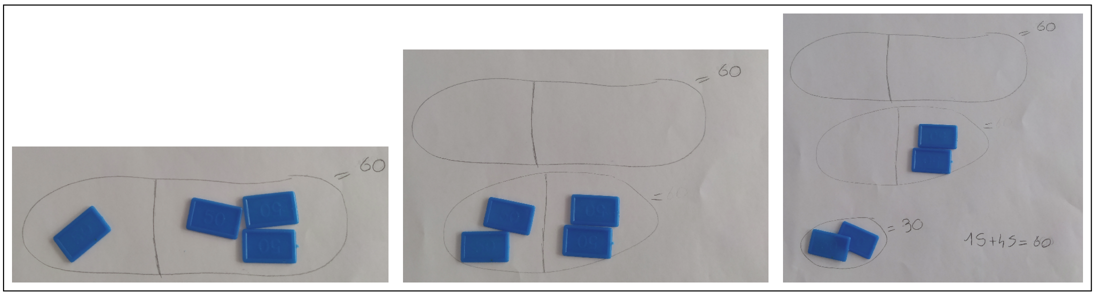


Figure 6 – élève F

Pour trouver la valeur d'un jeton quand on connaissait la valeur de quatre jetons, l'élève F a fait une division par 4, alors que l'élève E a partagé en 2 puis encore en 2.
L'élève F est venu proposer sa solution au tableau de façon très claire et a réussi à convaincre la classe.

En ce qui concerne le tâtonnement, la méthode la plus courante est de chercher deux nombres dont la somme est 60, puis de regarder si le plus grand est le triple du plus petit (comme on peut le voir chez les élèves G et H).

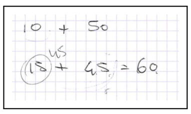


Figure 7 – élève G

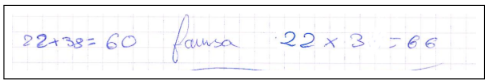
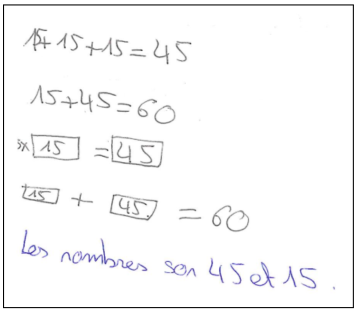

22+38=60 fausse 22×3 =66

Figure 8 – élève *H*

Pour ce qui est de l'élève *I*, on peut se demander s'il a compris que le jeton représente un nombre. Les petits rectangles sur sa feuille nous font penser que le jeton change de valeur au cours de la résolution. Nous serons attentifs·ves à cela dans la suite des activités.
Cette erreur n'est pas rare en algèbre. Il arrive que dans le cadre de la résolution de problème à l'aide de l'algèbre, des élèves utilisent la même lettre pour désigner des grandeurs différentes. Travailler la manipulation avec les jetons et prendre le temps lors de cette manipulation de mettre en place qu'un jeton représente un seul nombre pourrait aider les élèves ne pas faire cette erreur en algèbre. En étudiant les textes de Diophante à l'aide de la manipulation de jetons, nous pouvons donc préparer l'entrée dans l'algèbre.


15+15=45

15+45=60

3× $\boxed{15}$ = $\boxed{45}$

$\boxed{15}$ + $\boxed{45}$ = 60

Les nombres son 45 et 15.

Figure 9 – élève *I*

Les élèves qui ont fait le choix des essais, soit ont mis beaucoup plus de temps, soit n'ont pas réussi à aller jusqu'au bout par manque de temps. La méthode avec les jetons s'est donc imposée comme plus rapide.

Deuxième partie de l'activité :

Dans la deuxième partie de l'activité, les élèves devaient produire un texte « à la manière de Diophante ». Cette étape de verbalisation nous permet d'évaluer le raisonnement des élèves.
Si nous pouvions regarder le film muet de l'élève *J* (voir ci-dessous) en train de manipuler ses jetons, nous pourrions penser qu'il·elle a bien raisonner pour résoudre le problème. Dans sa verbalisation à travers l'écriture de son texte, on peut lire : « Si on dit que le tiers = 3 arithmes et que le plus grand nombre = 1 arithme ». Dans cette confusion entre tiers et triple, la manipulation seule ne permet pas de voir la non-maîtrise des notions. « La manipulation, si elle n'est pas intégrée dans un processus d'apprentissage, ne permet pas aux élèves de progresser, » [1].

Texte historique n°2

II

Il faut partager un nombre proposé en deux nombres qui soient dans un rapport donné (3).

Proposons donc de partager 60 en deux nombres qui soient dans le rapport du triple.

Si on dit que le tier = 3 arithmes et que le plus grand nombre = 1 arithme Cela voudrai dire que les 3 arithme et l'autre = 60. Donc si on réunit les 4 ensemble il faudrait faire 60 ÷ 4 = 15. Si pour 1 arithme est 3 fois plus grand que les 3 arithmes, il sufit donc de fair 3 x 15 = 45 pour 1 arithme et il reste 15 pour 3 arithmes.

FIGURE 10 – élève *J*

Globalement les élèves ont réussi à produire un texte comme celui de l'élève *K*. Parfois ce texte était accompagné d'un schéma avec les jetons comme celui de l'élève *L*.

Posons que le petit nombre est 1 arithme donc le plus grand nombre sera le triple, ou 3arithmes.

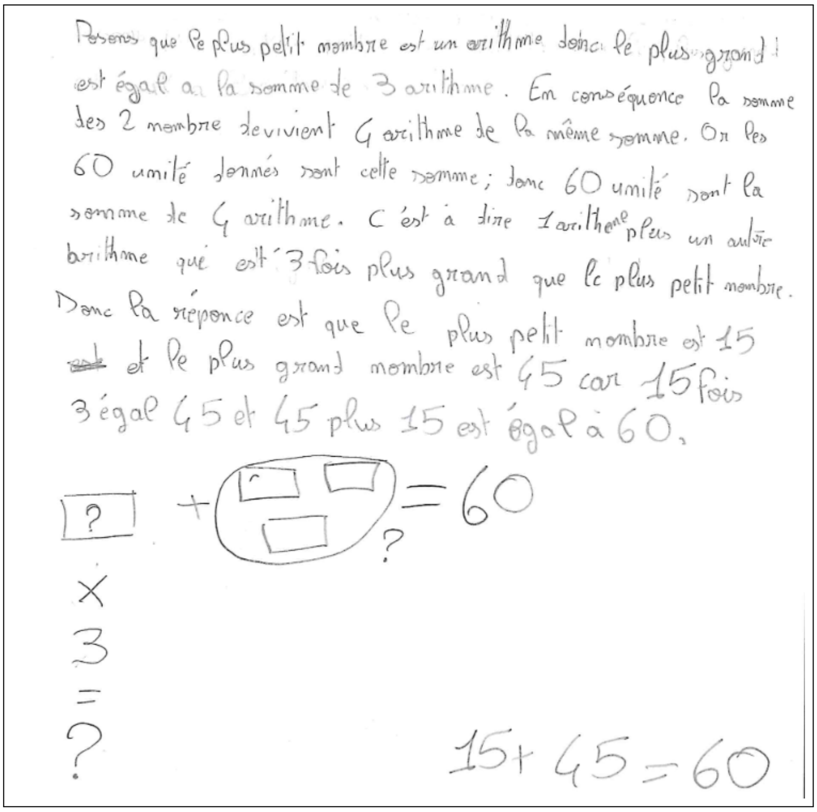
En conséquence la somme des deux nombre devient 4 arithmes. Or les 60 unités sont égales à 4arithmes.

Divisons 60 par 4 pour obtenir 1 arithme. Un arithme vaut donc 15.

Revenons à ce que nous avons posé : le plus petit nombre sera 15, tandis que le plus grand sera 45, et la preuve est évidente.

FIGURE 11 – élève *K*

Pour l'élève L, que l'arithme représente deux nombres différents, à la fois le petit nombre et le grand nombre : « C'est à dire 1 arithme plus un autre arithme qui est 3 fois plus grand que le plus petit nombre ».


Posons que le plus petit nombre est un arithme donc le plus grand est égal a la somme de 3 arithme. En conséquence la somme des 2 nombre devient 4 arithme de la même somme. Or les 60 unité donnés sont cette somme ; donc 60 unité sont la somme de 4 arithme. C'est à dire 1 arithme plus un autre arithme qui est 3 fois plus grand que le plus petit nombre. Donc la réponce est que le plus petit nombre est 15 ~~est~~ et le plus grand nombre est 45 car 15 fois 3 égal 45 et 45 plus 15 est égal à 60.

? + ? = 60

× 3 = ?

15 + 45 = 60

Figure 12 – élève L

3

Références

[1] Joël BRIAND. Manipuler en mathématiques… oui mais. *Au fil des maths*, (531), 2019.

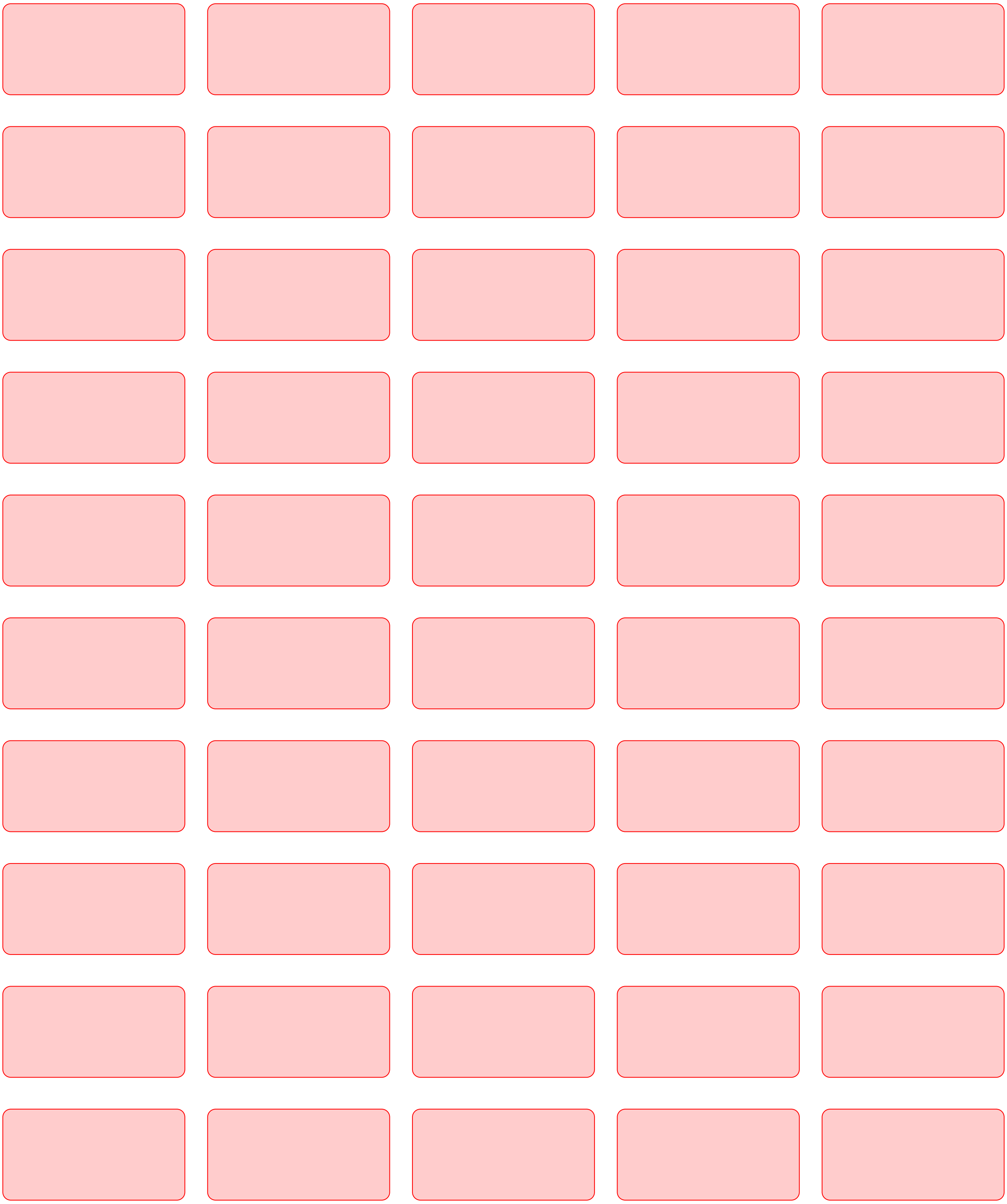
[2] Diophante d'ALEXANDRIE. *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones, traduit Paul Ver EECKE*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1959.

[3] Thierry DIAS. La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Lyon, Université Claude Bernard*, 2009.

[4] Luis RADFORD. Diophante et l'agèbre pré-symbolique. *Bulletin AMQ*, (Volume 31) :73–80, 1991.

[5] De VITORRI. Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique. *Petit x*, (97) :59–72, 2015.

Annexe



40	40	40	40	40
40	40	40	40	40
4	4	4	4	4
4	4	4	4	4
20	20	20	20	20
20	20	20	20	20
30	30	30	30	30
30	30	30	30	30
30	30	30	30	30
30	30	30	30	30