A08 : Une activité autour de nombres de Sophie Germain

Intervenant : Thomas Meyer (IREM de Grenoble)

Thomas Meyer fait partie du groupe « Calcul formel et preuve avec Xcas ».

Les activités proposées par ce groupe s'adressent à des élèves de seconde. En plus de donner du sens aux notions mathématiques, elles mettent en avant l'apport de l'usage de la technologie (logiciels tels que *Xcas*, tableurs et calculatrices).

Le logiciel *Xcas* permet de palier un manque de connaissances et de faire des calculs plus exigeants. (Ce logiciel peut être porté par les Casio graph 35+ et 90….)

Les activités suivantes ont été proposées lors d'un stage Math C2+ (https://www.mathc2plus.fr/), c'est un stage de 3 jours qui permet de découvrir le monde de la recherche mathématique et scientifique regroupant une quarantaine d'élèves de seconde volontaires et qui ont goût pour les maths. Stage qui a lieu sur le Campus de l'Inria.
Le premier jour du stage, 4 activités sont proposées aux élèves. Les élèvent forment des équipes et choisissent un problème qu'ils chercheront, ils devront présenter les résultats de leurs recherches.
Des ordinateurs avec *Xcas* sont fournis, le site de Bernard Parisse permet d'importer Xcas.
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/

Thomas Meyer a présenté 3 de ces problèmes .

Problème n°1 :

Pour quelle valeur de l'entier naturel a le nombre $a^4 + 4$ est-il premier ?

Lors des 3 heures de recherche, les élèves ont fait le raisonnement ou des conjectures.
- Pour $a = 0$, $a^4 + 4 = 4$ et n'est pas premier.
- Pour $a = 1$, $a^4 + 4 = 5$ et est premier.

Pour $a \geq 2$:
- Lorsque le nombre est pair, $a^4 + 4$ est pair.
- Lorsque le nombre se termine par 5, le chiffre des unités est 9.
- Lorsque le nombre est impair et se termine par 1, 3, 7 ou 9, $a^4 + 4$ est un multiple de 5.

Remarque : pour la deuxième conjecture, les élèves n'ont pas pensé à écrire le nombre sous la forme $10k + 5$ ou à travailler sur le chiffre des unités.
Idem, pour la conjecture suivante.

À l'aide du logiciel *Xcas*, ils peuvent tester si un nombre est premier ou non.

Ils ont fait un raisonnement par disjonction des cas :
- a est pair
- a est impair (non abouti).

Finalement, un élève a pensé à factoriser l'expression $a^4 + 4$ à l'aide de *Xcas.*

$$a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$$

Factorisation sans logiciel : $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2$...

Solution proposée par un élève :
$a^4 + 4$ est premier
Donc $a^2 + 2a + 2 = 1$ ou $a^2 - 2a + 2 = 1$
…

Solution : $a = 1$

Sophie Germain a montré que pour tout entier $a \geq 2$, $a^4 + 4$ n'est pas premier.

Extension : Que peut-on dire de la somme du produit de 4 entiers consécutifs et de 1 ?
(c'est un carré)
Pour la démonstration : Factorisation à l'aide de *Xcas* ou factorisation donnée.

Problème n°2 :

Objectif : travailler sur les conditions nécessaires.

On considère un repère (O, I, J) du plan.Vous devez placer des points à coordonnées entières en vous imposant la contrainte suivante : « Aucun milieu de segment joignant deux points placés ne doit avoir ses deux coordonnées entières. Quel est le nombre maximal de points que vous pourrez ainsi placer ?»

La formulation de l'énoncé a posé problème.
Lors de l'atelier, nous avons conclu que le problème devait être reformulé avec des quantificateurs.

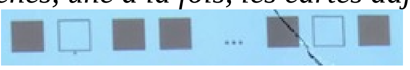
Solution : 4 points

Démonstration à l'aide d'une figure.

Problème n°3 : d'après maths à modeler

Objectif : travailler sur les conditions nécessaires et suffisantes.

On dispose des cartes bicolores (une face est blanche, l'autre est noire) en ligne.
On peut retirer les cartes blanches, une à la fois, les cartes adjacentes sont alors retournées.



Peut-on retirer toutes les cartes de la ligne ?

Les élèves avaient à disposition ce type de cartes pour expérimenter. Certains ont expérimenté avec de nombreuses cartes alors que d'autres ont commencé par un petit nombre de cartes.

Solution : on peut retirer toutes les cartes s'il y a un nombre impair de cartes blanches

Démonstration :
Il est nécessaire d'avoir au moins une carte blanche.
Une seule carte blanche : condition nécessaire et suffisante. On la retire et on a alors deux lignes dont la première se termine par une carte blanche et la seconde commence par une carte blanche.
Pas à pas, on retire toutes les cartes des deux lignes.
Deux cartes blanches : représentation
...

Adresse mail de l'animateur : thomas.meyer@ac-grenoble.fr