A07 : Raisonner avec le Puzzle de la Division Euclidienne

Fabrice Vandebrouck, Sylvie Alory, Benoît Mariou (Irem de Paris)

mail Sylvie : alory.sylvie@free.fr

Différentes modalités pour travailler la démonstration en classe :

- Le groupe classe essaie d'élaborer la démonstration puis rédaction de la démonstration par groupe de 2

Exemple en Terminale : toute suite convergente est majorée

- Démonstration puzzle

Exemple de la preuve du théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne

Preuve faite en cours (Maths expertes ou L1 info) puis quelques mois plus tard, il est demandé aux étudiants de « reconstituer » la preuve. Elèves de Terminale devaient réviser tout le chapitre sur la division euclidienne et étudiants de L1 révisent pour l'examen.
Extrait de l'examen de L1 :

Exercice 1. (4 points)
Dans cet exercice on désire reconstituer la preuve du théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne (voir 1.3 du chapitre d'arithmétique) : Soit a un entier positif et b un entier positif non nul. Alors il existe un couple unique d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Reconstituer sur votre copie la preuve en utilisant dans le bon ordre les 15 items suivants (tous doivent être utilisés une seule fois et aucun autre argument n'est nécessaire). On commencera au choix par l'unicité ou par l'existence.

5' — On a $-b < r_2 - r_1 < b$ car $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$
6 — donc on a bien $0 \leq r < b$
2' — Soient (q_1, r_1) et (q_2, r_2) deux couples qui vérifient $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ avec $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$.
2 — On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $bn \leq a\}$
8' — donc $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$
4 — On a $bq \leq a < b(q+1)$ car sinon q ne serait pas le plus grand élément de E
7 — donc le couple (q, r) ainsi défini vérifie $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
3' — On a $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ car $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$
7' — donc $q_1 - q_2 = 0$
1' — On montre l'unicité du couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème
1 — On montre l'existence d'un couple (q, r) vérifiant les conditions du théorème
4' — donc $r_2 - r_1$ est un multiple de b
3 — E possède un plus grand élément qu'on appelle q.
5 — On note $r = a - bq$
6' — donc $r_2 - r_1 = 0$ car 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b

difficulté le passage
3' ⇒ 4'

Grille d'analyse :

1. Structuration bien identifiée : deux blocs (existence et unicité)
2. Objets bien définis
3. Les pas de déductions sont corrects
4. Rôle des « donc »

Erreurs similaires en Terminale et en L1, Term Maths expertes réussissent mieux (profils d'étudiants différents).
Erreurs relevées :

- Blocs mélangés
- Reconnaissance de r1 – r2 est multiple de b
- Inversion de q1-q2=0 avec (q1=q2 et r1=r2)
- Variables non introduites

Démonstrations puzzle possibles :

En Seconde :

- La somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

Différentiation (pour les meilleurs) La somme de deux multiples d'un entier est un multiple de cet entier.

- Parallélogramme et égalité de deux vecteurs.

(deux implications)

Première spé :

Terminale spé :