Eléments de logique pour les enseignants

I/ Propositions et connecteurs logiques

1) Proposition logique

Définitions :

- Une *proposition logique* est un énoncé qui est soit VRAI, soit FAUX.
  On dit que "VRAI" et "FAUX" sont les valeurs de vérité de la proposition.

On désigne par des lettres majuscules P , Q, ... les propositions et on utilise parfois les guillemets « … » pour bien délimiter l'énoncé d'une proposition.

- Un *prédicat* est un énoncé qui dépend d'un paramètre ou de plusieurs paramètres et tel que, dès qu'on choisit un ensemble de valeurs de ce(s) paramètre(s), cet énoncé est soit VRAI, soit FAUX.

Exemples :
« L'entier 6 est un multiple de 2 » est une proposition vraie.
« $2 \times 3 = 7$ » est une proposition fausse.
$P(n)$: « n est pair » est un prédicat sur ℕ : l'énoncé « $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ » est faux, $P(4)$ est vraie, $P(3)$ est faux…
Remarques :

- Dans un cours usuel de mathématiques, un théorème, une propriété, un lemme, un corollaire sont des propositions logiques qui ont été démontrées vraies dans le cadre d'une théorie mathématique.
- Une définition est un énoncé qui pose des éléments de langage concernant des objets mathématiques et permet d'introduire une notation. Une définition n'est pas une proposition logique.

2) Connecteurs logiques

On construit de nouvelles propositions à partir de propositions existantes en utilisant des connecteurs logiques.

Définitions :

- Connecteur binaire "OU" (notation : ∨) (OU inclusif) :

Si P et Q sont deux propositions, on note « P OU Q » ou « P ∨ Q », la proposition qui est VRAIE dès que l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie, et FAUSSE si P et Q sont toutes les deux fausses.

- Connecteur binaire "ET" (notation : ∧) :

Si P et Q sont deux propositions, on note « P ET Q » ou « P ∧ Q », la proposition qui est VRAIE si P et Q sont toutes les deux vraies, et FAUSSE dès que l'une au moins des deux propositions P et Q est fausse.

- Connecteur unaire "NON" (notation : ¬) :

Si P est une proposition, on note « NON (P) » ou « ¬P », la proposition qui est VRAIE si la proposition P est fausse et qui est FAUSSE si la proposition P est vraie.

Table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg P$
V	V	V	V	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Exemples :

1) On considère la proposition P : "tout nombre premier est impair" et
la proposition Q :" tout carré de réel est un réel positif".
P est-elle vraie ?
Q est-elle vraie ?
Que signifie la proposition $P \wedge Q$? Cette proposition est-elle vraie ?
Que signifie la proposition $P \vee Q$? Cette proposition est-elle vraie ?

2) La négation de P :" 3 est pair" est non (P) :"3 est impair".

A partir de ces connecteurs, on définit d'autres connecteurs logiques. En voici deux très utilisés en mathématiques :

Définition : Connecteur binaire "Implication logique" :

Si P et Q sont deux propositions, on note « P ⇒ Q » la proposition « NON(P) OU Q » et on lit "P implique Q".
Dans « P ⇒ Q », la proposition P s'appelle la prémisse.

Table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarques :

1. La proposition « P ⇒ Q » est vraie sauf lorsque (P est vraie et Q est fausse).
   Par conséquent, pour démontrer qu'une implication « P ⇒ Q » est vraie,
   il suffit de vérifier que P vraie $\Longrightarrow Q$ vraie (il s'agit d'un raisonnement déductif).

   Attention : L'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie si P est faux ou si P et Q sont vraies.

2. Lorsque la proposition « P ⇒ Q » est vraie, on dit indifféremment P implique Q ou Q est une condition nécessaire pour P ou P est une condition suffisante pour Q.

Exemples :

- On veut montrer que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, n$ et m impairs $\Rightarrow n+m$ pair.

En pratique, pour montrer cette implication, on travaille à partir de deux entiers impairs, c'est-à-dire que l'on se place dans la situation où P est vraie. On utilise l'implication P vraie $\Longrightarrow Q$ vraie.
Et si P est fausse, l'implication est toujours vraie donc il n'y a rien à vérifier.

- L'implication : « Si 2 est impair alors 5 est nul » est vraie !

- Soit un entier naturel n.

L'implication : « $10^n + 1$ est divisible par 9 $\Rightarrow 10^{n+1} + 1$ est divisible par 9 » est vraie parce que la proposition P est fausse.
En effet, $10^n + 1$ est divisible par 9 $\Leftrightarrow 10^n + 1 \equiv 0\ [9] \Leftrightarrow 1^n + 1 \equiv 0\ [9] \Leftrightarrow 2 \equiv 0\ [9]$

Définition : Connecteur binaire " Equivalence logique " :

Si P et Q sont deux propositions, on note « P ⇔ Q » la proposition « (P ⇒ Q) ET (Q ⇒ P) » et on lit "P équivalent à Q".

Table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarques :

1. Lorsque la proposition « P ⇔ Q » est vraie, on dit indifféremment les propositions P et Q sont équivalentes ou P est une condition nécessaire et suffisante pour Q ou P si et seulement si Q.

2. Attention ! Dire que la proposition P ⇔ Q est vraie ne signifie pas que les propositions P et Q sont vraies.
   En revanche, dire que la proposition P ⇔ Q est vraie signifie que les propositions P et Q ont la même table de vérité, i.e. qu'elles sont toutes les deux vraies en même temps ou qu'elles sont toutes les deux fausses en même temps.

Définitions :

Etant donnée une implication « $P \Longrightarrow Q$ », on lui associe les propositions logiques suivantes :

- Implication contraposée
  L'implication « $\text{NON}(Q) \Longrightarrow \text{NON}(P)$ » est appelée implication contraposée de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ ».
- Implication réciproque
  L'implication « $Q \Longrightarrow P$ » est appelée implication réciproque de « $P \Longrightarrow Q$ ».

Théorème :

$$(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow (\ \text{NON}(Q) \Longrightarrow \text{NON}(P)\ )$$

Autrement dit, il est équivalent de démontrer une implication ou la contraposée de cette implication.

II/ Quantificateurs

Définitions :

Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat défini sur E.

- Proposition logique universelle

  La proposition logique notée « $\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$ » prend la valeur VRAI si $P(x)$ est vraie pour chacun des éléments x de E et prend la valeur FAUX dès qu'il existe un élément x de E pour lequel $P(x)$ est fausse.
- Proposition logique existentielle

  La proposition logique notée « $\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$ » prend la valeur VRAI si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E et prend la valeur FAUX si $P(x)$ est fausse pour chaque élément x de E.

Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel et le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel.

Remarques :

La proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$ » se lit « Pour tout x de E, $P(x)$ est vraie » ou « Quel que soit x de E, $P(x)$ est vraie. »

La proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$ » se lit « Il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ est vraie »

Exemples :

- La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0.$ » est fausse.
- La proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ x > 0.$ » est vraie.
- La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x > -1.$ » est vraie.

Conséquences :

- La négation de la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est la proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(\ P(x))$ ».
- La négation de la proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{NON}(\ P(x))$ »

Remarque :

La variable x qui apparait dans les écritures « $\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$ » ou « $\exists x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est une variable muette.
On pourrait très bien écrire « $\forall z \in \mathrm{E}, P(z)$ » ou « $\exists a \in \mathrm{E}, P(a)$ »

III/ Différents types de raisonnement pour démontrer

1. Démontrer en utilisant un contre-exemple :

Le principe de la démonstration utilisant un contre-exemple est basé sur le résultat logique suivant :

Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un exemple, appelé *contre-exemple* la mettant en échec.

Plus précisément, si $P(x)$ est une proposition définie pour les éléments x d'un ensemble E.

Pour démontrer que la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, P(x)$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire un élément x de E pour lequel $P(x)$ est fausse.

En effet, $NON(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \left(\exists x \in E, NON\left(P(x)\right)\right)$

Exemples :

- La proposition « Si un entier n est divisible par 5 et par 10 alors il est divisible par 50 » est fausse : 30 est divisible par 5 et par 10 mais n'est pas divisible par 50.
- La proposition « Un nombre réel est toujours rationnel » est fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
- La proposition « $\forall x > 0,\ \frac{1}{x} \leq x$ » est fausse : pour $x = \frac{1}{2},\ \frac{1}{x} = 2$ donc $\frac{1}{x} > x$ et la proposition est fausse.

2. Démontrer en utilisant la contraposée :

Le principe de la démonstration par contraposée est basé sur le résultat logique suivant :

Une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (NON(Q) \Rightarrow NON(P))$$

Quand une implication parait difficile à démontrer sous sa forme directe, on peut essayer de démontrer sa contraposée.

Exemples :

- ABC est un triangle tel que $AB = 7, BC = 4$ et $AC = 5$, alors :

  $AB^2 = 49$ et $BC^2 + AC^2 = 16 + 25 = 41$

  Donc $AB^2 \neq BC^2 + AC^2$ et d'après la contraposée du Théorème de Pythagore, ABC n'est pas un triangle rectangle.

- Démontrer que si le carré d'un entier relatif n est pair alors n est pair.

On démontre la contraposée : « Si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair »

C'est-à-dire : « Si n est impair alors n^2est impair ».

Soit $n \in \mathbb{Z}$,on suppose n impair donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$

Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2p + 1$

Avec $p = 2k^2 + 2k$ donc $p \in \mathbb{Z}$ et n^2 est impair

La contraposée est donc vraie et donc si le carré d'un entier relatif n est pair alors n est pair.

3. Démonstration par l'absurde :

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

En effet, $P \Leftrightarrow [NON(P) \Longrightarrow (A \wedge NON(A))]$, ce qui peut être vérifié avec une table de vérité.

<u>Exemples :</u>

- Démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

On suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$.

Or deux nombres égaux ont le même carré donc $\left(\sqrt{2}\right)^2 = (1{,}414)^2$.

C'est-à-dire $2 = 1{,}999396$ égalité fausse donc on obtient une contradiction.

Et donc la proposition $\sqrt{2} = 1{,}414$ est fausse : $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

On peut également démontrer par l'absurde les résultats suivants :

- $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
- Le nombre 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.
- Unicité de la limite.

4. Démonstration par disjonction des cas :

Le raisonnement par disjonction des cas s'utilise quand on veut démontrer une proposition dépendant d'un paramètre *x* appartenant à un ensemble *E* et que la justification dépend de la valeur de *x*. On écrit alors

$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots E_n$ et on sépare les raisonnements suivant que $x \in E_1, x \in E_2, \dots, x \in E_n$.

En effet, $[\forall x \in E, P(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E_1, P(x))\ et\ (\forall x \in E_2, P(x))\ et \dots et\ (\forall x \in E_n, P(x))\ ]$

<u>Exemple</u> : Démontrer que pour tout entier relatif *n*, $n(n+3)$ est pair.

1^{er} cas : *n* est pair

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

Alors $n(n+3) = 2k(2k+3) = 2p$ avec $p = k(2k+3)$ donc $p \in \mathbb{Z}$

Et $n(n+3)$ est pair

2^e cas : *n* est impair

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$

Alors $n(n+3) = (2k+1)(2k+1+3) = (2k+1)(2k+4) = 2(2k+1)(k+2) = 2p$

Avec $p = (2k+1)(k+2)$ donc $p \in \mathbb{Z}$

Et $n(n+3)$ est pair

Finalement, pour tout entier relatif *n*, $n(n+3)$ est pair.

5. Démonstration par analyse-synthèse

Le principe de la démonstration par analyse-synthèse est basé sur le connecteur « Equivalence logique » :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$$

Exemples : résolutions d'équations, d'inéquations, de systèmes….

- Résoudre l'équation suivante :
  Première formulation : *(les implications sont souvent sous-entendues au collège et au lycée)*
  $$7x + 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad 7x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6}{7}$$
  Si $x = \frac{-6}{7}$ alors $7x + 4 = 7 \times \frac{-6}{7} + 4 = -6 + 4 = -2$, l'égalité est bien vérifiée.
  L'équation a donc pour solution $\frac{-6}{7}$
  Deuxième formulation : *(les équivalences sont souvent sous-entendues au collège et au lycée)*
  $$7x + 4 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 7x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-6}{7}$$
  L'équation a donc pour solution $\frac{-6}{7}$
- Déterminer la position relative de la droite D de représentation paramétrique
  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et du plan P d'équation cartésienne $x + 2y - z + 5 = 0$.

  On justifie que D et P sont sécants puis pour déterminer le point d'intersection de la droite et du plan, on résout le système $(S)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 2t \\ x + 2y - z + 5 = 0 \end{cases}$

  Si (x, y, z, t) vérifie le système (S) alors
  $$x + 2y - z + 5 = 1 + 2t + 6 - 2t + 1 + 2t + 5 = 13 + 2t = 0$$
  Donc $t = \frac{-13}{2}$
  Et $x = -12$; $y = \frac{19}{2}$; $z = 12$

  Vérification : *(rarement faite)*

  Si $x = -12$; $y = \frac{19}{2}$; $z = 12$ et $t = \frac{-13}{2}$ alors (x, y, z, t) vérifie le système (S).

  Autre formulation : *travailler par équivalence*

6. Raisonnement par récurrence