

Théorème de Thalès et sa réciproque

I. Dans le secondaire

A. Le théorème de Thalès

Dans les manuels du secondaire, le théorème de Thalès est généralement énoncé sous l'une des deux formes suivantes.

THÉORÈME Si (DB) et (EC) sont deux droites sécantes en A avec (BC) et (DE) parallèles, alors on peut écrire les égalités :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Source : Dimensions mathématiques 3ème (Hatier, 2016).

Théorème

Théorème de Thalès

Si les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés, et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Le diagramme illustre le théorème de Thalès dans deux configurations. À gauche, la 'Configuration classique' montre une droite d'intersectant deux droites parallèles d et d' aux points B, M et C, N respectivement. Une troisième droite passe par A, M et C, N. À droite, la 'Configuration en papillon' montre une droite d'intersectant deux droites parallèles d et d' aux points B, C et M, N respectivement. Une troisième droite passe par A, M et C, N.

Configuration classique

Configuration « en papillon »

Source : Mission Indigo mathématiques 3ème (Hachette, 2020).

Ces deux énoncés sont équivalents.

B. La réciproque du théorème de Thalès

📌 Pour la réciproque, on trouve parfois l'énoncé suivant

Théorème (Réciproque du théorème de Thalès)

Si les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre et que les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Source : Le livre scolaire mathématiques 3ème, manuel de cours, mai 2021.

Cet énoncé est vrai mais l'égalité des trois rapports y est demandée. Pourtant il suffit d'avoir l'égalité de $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ pour conclure au parallélisme.

📌 On trouve aussi parfois l'énoncé suivant :

Réciproque du théorème de Thalès et droites parallèles

Réciproque du théorème de Thalès :

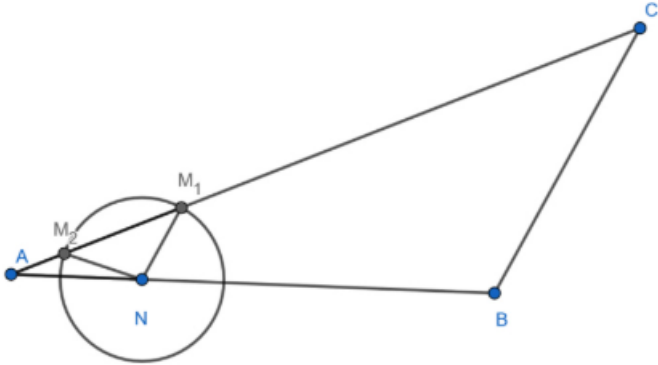
Si les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre et que deux des trois rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Source : Le livre scolaire mathématiques 3ème, cahier d'exercices, 2021.

Cet énoncé est faux. Il faut faire attention à bien exclure le bon rapport, à savoir $\frac{MN}{BC}$, sinon rien ne garantit le parallélisme. En effet :

Les points A, M_1, C et A, N, B sont alignés dans le même ordre et on a $\frac{M_1N}{BC} = \frac{AN}{AB}$, et on a bien $(M_1N) \parallel (BC)$.

Les points A, M_2, C et A, N, B sont alignés dans le même ordre et on a $\frac{M_2N}{BC} = \frac{AN}{AB}$. Pourtant les droites (M_2N) et (BC) ne sont pas parallèles.



On peut trouver la réciproque énoncée dans les manuels comme suit :

Théorème

Théorème de Thalès : réciproque

Si les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Source : Mission Indigo mathématiques 3ème (Hachette, 2020).

PROPRIÉTÉ (d) et (d') sont deux droites sécantes en O .
 A et B sont deux points de (d) distincts de O . M et N sont deux points de (d') distincts de O avec A, B, O et M, N, O alignés dans le même ordre.
 Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON}$, alors (AM) et (BN) sont parallèles.

Remarque : Si l'égalité des rapports n'est pas vérifiée, le théorème de Thalès permet de conclure que (d) et (d') ne sont pas parallèles.

EXEMPLE 1 :

$\frac{OA}{OB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{OM}{ON} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
 L'égalité de Thalès est vérifiée donc (AM) et (BN) sont parallèles.

EXEMPLE 2 :

$\frac{OA}{OB} = \frac{2,1}{4,1} \approx 0,51$ et $\frac{OM}{ON} = \frac{1,6}{3,2} = 0,5$.
 L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée donc (AM) et (BN) ne sont pas parallèles.

Source : Dimensions mathématiques 3ème (Hatier, 2016)..



Démonstration :

Une démonstration par Euclide

La réciproque du théorème de Thalès, telle qu'énoncée dans le manuel Mission Indigo, n'en est pas une à proprement parler. En effet le théorème de Thalès étant énoncé sous la forme « Si P et Q alors R », sa réciproque devrait être : « Si R alors P et Q ».

On pourrait proposer plutôt les énoncés suivants.

✚Théorème 1 : *Théorème de Thalès*

Soient A, M, B et A, N, C des points du plan alignés (dans le même ordre).

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Dans ce cas, ce rapport est aussi égal à $\frac{MN}{BC}$.

✚Théorème 2 : *Réciproque du théorème de Thalès*

Soient A, M, B et A, N, C des points du plan alignés dans le même ordre.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Dans ce cas, ce rapport est aussi égal à $\frac{MN}{BC}$

II. Dans le supérieur

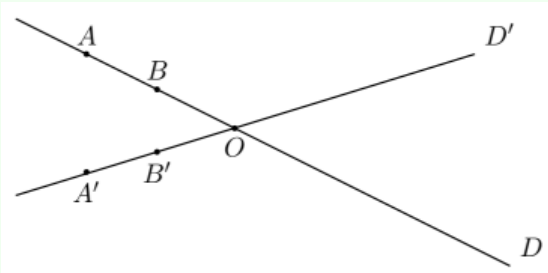
Dans le supérieur, le théorème et sa réciproque peuvent s'énoncer comme suit :

✚Théorème 3 : *Thalès et sa réciproque dans le plan*

Dans un espace affine de dimension 2, soient D et D' deux droites affines sécantes en un point O . Soient $A, B \in D$ et $A', B' \in D'$ quatre points distincts entre eux et de O .

Les droites (AA') et (BB') sont parallèles si et seulement si $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$.

Dans ce cas, ce rapport vectoriel est aussi égal à $\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$



Source : cours de L3 mathématiques *Structures affines*, Université de Franche-Comté, Cécile Armana, 2024.