Université de Franche-Comté
UFR *Sciences et techniques*
Starter ST
Année 2023-2024

Pré-requis

Bienvenue à l'UFR *Sciences et techniques*. Vos études de mathématiques au lycée doivent vous permettre de suivre dans de bonnes conditions l'enseignement dispensé en mathématiques lors de ce semestre.

Cette fiche est constituée d'une liste d'exercices que vous devriez savoir faire et savoir rédiger à votre arrivée en licence première année dans une filière scientifique (mathématiques, informatique, sciences physique, sciences de l'ingénieur) à l'université de Franche-Comté.

Nous vous proposons de faire ces exercices en ce tout début d'année. Si vous le souhaitez, vous pouvez bénéficier de 5 séances de 3 heures les 6, 7, 8 et 15 septembre encadré.es par des enseignant.es qui pourront faire les compléments de cours dont vous auriez besoin.

1 Exercices portant sur le programme de spécialité mathématique

Exercice 1.

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?
3. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B : Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 2. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2.x^2}}$. Calculer $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ puis généraliser.

Exercice 4. Soit $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi(n) \geq n$.

Exercice 5.
1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $4n > 2(n+1)$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

Exercice 6. Démontrer que pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 7.
1. Donner la définition d'un nombre rationnel. Définir un nombre irrationnel.
2. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{5}$ est-il rationnel ?
3. $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{8}{5}$ est-il rationnel ?
4. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
5. Montrer que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel.
6. Trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit rationnelle, trouver deux nombres irrationnels dont la somme soit irrationnelle. Même question avec le produit.

Exercice 8. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, (f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante sur I.

Exercice 9. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
Si a et b sont irrationnels, alors :
1. $a + b$ est irrationnel.
2. ab est irrationnel.
3. a^2 est rationnel.
4. aucune des trois réponses précédentes.

Exercice 10. On lance un dé équilibré. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins un 6 parmi ces n lancers ? Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11. On place 36 jetons dans un sac dont 10 sont numérotés de 0 à 9 et les 26 autres représentent les lettres de l'alphabet.
On tire 7 jetons du sac.
1. On tire les 7 jetons successivement avec remise.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant uniquement des lettres.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant uniquement des chiffres.
   (d) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 lettres et 4 chiffres.
   (e) Déterminer le nombre de tirages contenant au moins 5 chiffres.

   (f) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 lettres puis 4 chiffres.

2. On tire les 7 jetons successivement sans remise.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant uniquement des lettres.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant uniquement des chiffres.
   (d) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 lettres et 4 chiffres.
   (e) Déterminer le nombre de tirages contenant au moins 5 chiffres.
   (f) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 lettres puis 4 chiffres.
3. On tire les 7 jetons simultanément.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant uniquement des lettres.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant uniquement des chiffres.
   (d) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 lettres et 4 chiffres.
   (e) Déterminer le nombre de tirages contenant au moins 5 chiffres.

Exercice 12. Choisir la (ou les) réponse(s) correcte(s).
La négation de « tous les élèves du groupe sont des filles » est :

- « tous les élèves du groupe sont des garçons ».
- « tous les élèves du groupe ne sont pas des garçons ».
- « au moins un des élèves du groupe n'est pas une fille ».
- aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Exercice 13. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
x et y étant deux nombres réels, la négation de $x^2 = y^2$ est :

1. $x \neq y$.
2. $x \neq y$ ou $x \neq -y$.
3. $x \neq y$ et $x \neq -y$.
4. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Exercice 14. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
La négation de « l'équation $f(x) = 0$ admet une solution réelle » est :

1. « l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle ».
2. « l'équation $f(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions réelles ».
3. « l'équation $f(x) = 0$ admet une infinité de solutions réelles ».
4. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Exercice 15. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).
La négation de « f est une fonction dérivable en a » est :

1. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est réelle ».
2. « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie ».

3. « $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ n'existe pas ».
4. « $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est infinie ou n'existe pas ».

Exercice 16. (E) est l'équation différentielle $y' + 2y = e^{3x}$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^{3x}}{5}$ est une solution particulière de (E).
2. Démontrer que f est une solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 17. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Soit les propriétés P_1 : « la suite (u_n) est arithmétique » et P_2 : « $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ ».
Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. La propriété P_1 implique la propriété P_2.
2. La propriété P_2 implique la propriété P_1.
3. Les propriétés P_1 et P_2 sont équivalentes.

Exercice 18. Vrai ou faux ?

1. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a et b divisent c, alors ab divise c.
2. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a divise b et c, alors bc est un multiple de a.

Exercice 19. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ? « S'il existe un réel a tel que $f'(a) = 2$, alors f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. »
2. La réciproque de la proposition précédente est-elle vraie ?

Exercice 20.
La fonction numérique f de variable réelle x est définie par $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Étudier les variations de la fonction f puis en déduire le maximum et le minimum de cette fonction.

Exercice 21.

1. On définit la fonction $g : [0; \pi] \to \mathbb{R}$ par $g(\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$.
   Déterminer les extrema de g.
2. Déterminer les valeurs de θ, appartenant à l'intervalle $] - \pi; 0]$, pour lesquelles $\cos(\theta).\sin(\theta)$ est extremal.

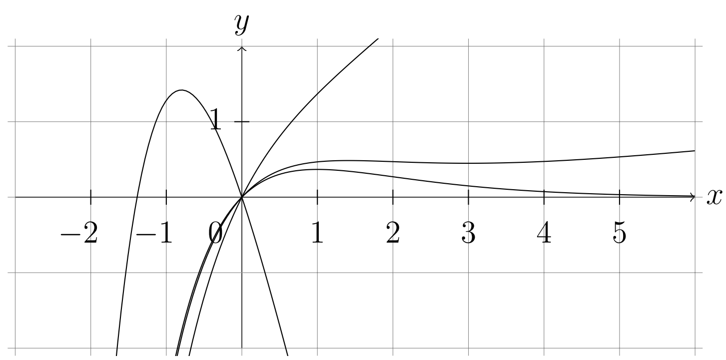
Exercice 22. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}.$$

1. Calculer les termes u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On admet que pour tout entier n , $u_n \neq 1$. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Pour tout entier n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que la suite (v_n) est géométrique (préciser la raison).
   (c) Pour tout entier n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 23. On considère pour tout réel k, la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = xe^{-x} + kx$. On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative.

1. Justifier que si $k > 0$ alors $f_k(x)$ est du signe de x.
2. Déterminer la limite de f_k en $+\infty$ en distinguant les cas : $k > 0$, $k = 0$ et $k < 0$.
3. (a) Calculer $f_k'(x)$ puis $f_k''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f_k' .
4. Les courbes ci-dessous sont les courbes représentatives des fonctions f_{-4} , $f_{0,1}$, f_0 et f_1.

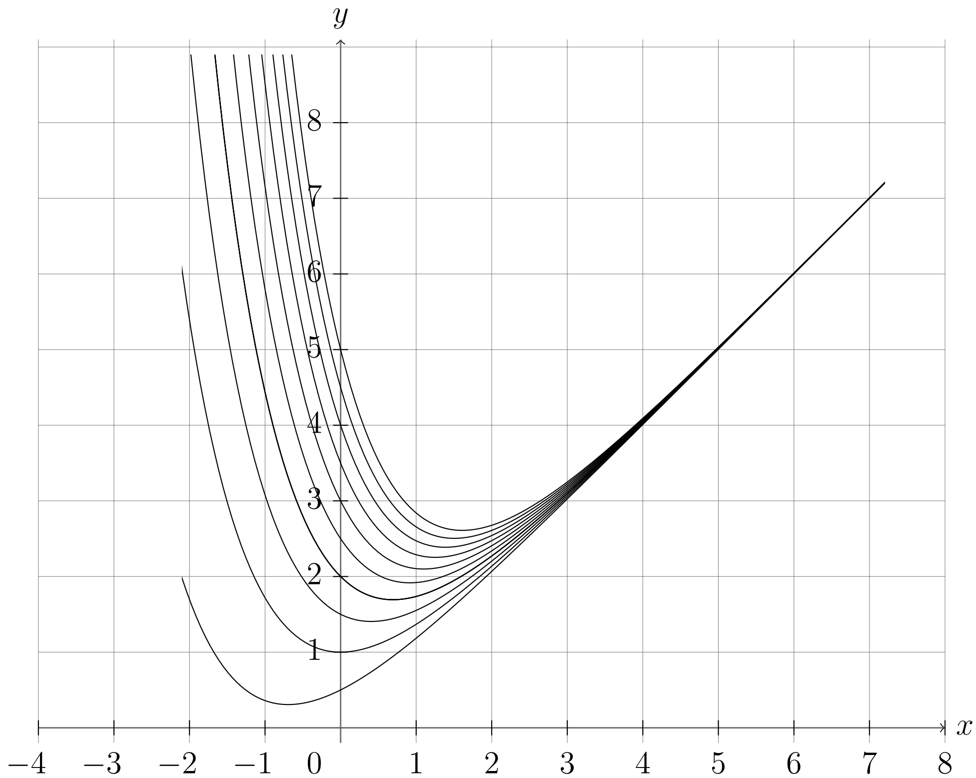


Reconnaître chaque courbe. On justifiera à l'aide des questions précédentes.

Exercice 24. Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

Exercice 25.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 0$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 26.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}$.
2. La suite (I_n) est-elle convergente ?

Exercice 27. Indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s) :

Si f est définie en a alors nécessairement :

1. f est continue en a.

2. $\ln(f)$ est définie en a.
3. $\dfrac{1}{f}$ est définie en a.
4. $\dfrac{1}{e^f}$ est définie en a.

Exercice 28.

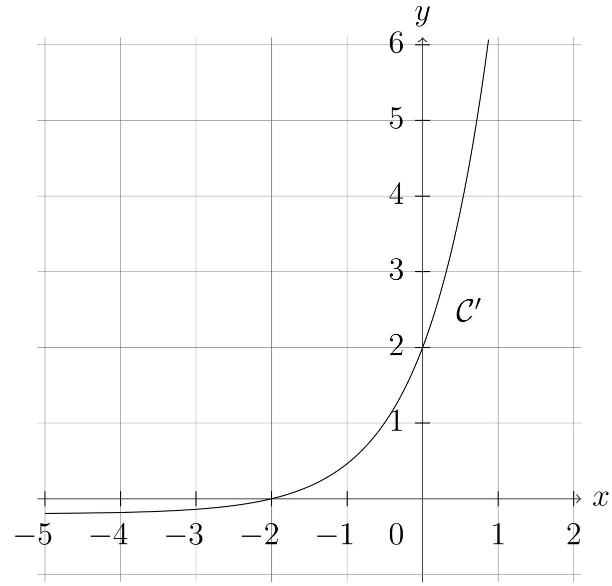
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère une fonction f dérivable sur $[-5; +\infty[$ telle que :

— $f(-2) = 3$

— la dérivée f' admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci-contre.

***Proposition** : La fonction f est croissante sur son domaine de définition.*

Indiquez si la proposition est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.



Exercice 29.

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 30.

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Pour tout réel $l \geq 1$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_{1}^{t} f(t)\mathrm{d}t$.

1. Donner une représentation graphique de F.
2. Calculer $F(t)$ en fonction de t.
3. Calculer la limite de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

Exercice 31.

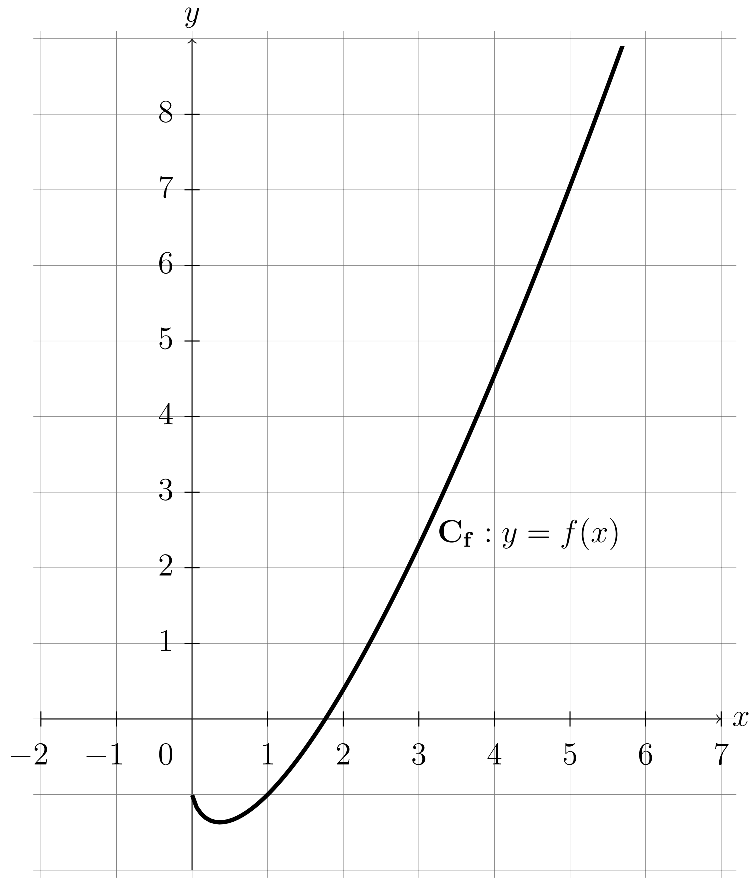
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x.\ln(x) - 1$.

Partie A : Étude d'une fonction

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; \infty[$.
3. montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0; \infty[$. On note α cette solution. déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0;\infty[$.
5. Montrer que $\ln(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$

Partie B : calcul d'une intégrale



On considère la courbe $\mathcal{C}$, représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donnée ci-dessous.
2. Montrer que la fonction F qui à x associe $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(x) - \dfrac{x^2}{4} - x$ est une primitive de f sur $]0;\infty[$.
3. Montrer que $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
   En déduire une valeur approchée de I.

Exercice 32.

Pour tout entier n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_1.
2. Calculer $u_0 + u_1$.
3. En déduire la valeur de u_0.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{e^n - 1}{n}$.
5. Calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t}\mathrm{d}t$.
7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 33.

Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\mathrm{d}x$.

1. démontrer que $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$ et $J = 1 + I$.
2. En déduire I et J.

Exercice 34.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x.e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par partie.

Exercice 35. Résoudre l'inéquation $\cos(2x) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$.

Exercice 36.
Les exercices de trigonométrie sur le site du lycée Valin vous permettent de vous entraîner : http://lycee-valin.fr/maths/exercices_en_ligne/trigo.html.
Les tous premiers exercice du site exo7 également : http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00081.pdf

2 Exercices portant sur le programme de Mathématiques expertes en Terminale

Exercice 37. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Démontrer, par récurrence, que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2n & -2 \\ 0 & 2n & -2n+1 \end{pmatrix}$.

Exercice 38. Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$. Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que si m divise n, alors $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$.
2. Soit d le PGCD de m et n. Montrer que $\mathbb{U}_d = \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.

Exercice 39. Démontrer que, pour tout entier n, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 40. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 - x + 4 \equiv 0[6]$.

Exercice 41. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels $(a;b)$ tels que $a+b = 72$ et $\text{PGCD}(a;b) = 9$.

Exercice 42. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3n + 5m = 1$.

Exercice 43. On associe à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier compris entre 0 et 25 (la lettre A est associée à 0, la lettre B est associée à 1, ..., la lettre Z est associée à 25).
On définit un chiffrement de la façon suivante : à l'entier x associé à la lettre à chiffrer, on fait correspondre l'entier y compris entre 0 et 25 tel que : $y \equiv 11x + 8[26]$. La lettre chiffrée est alors celle associée à l'entier y.

1. (a) Justifier que la lettre G est codée par la lettre W.
   (b) Coder le mot GAUSS.

2. Démontrer que deux lettres distinctes sont codées par deux lettres distinctes.
3. (a) Déterminer l'inverse de 11 modulo 26.
   (b) Démontrer que $y \equiv 11x + 8[26]$ équivaut à $x \equiv 19x + 4[26]$.
   (c) Décoder LANKIJ

sources

- Concours avenir
- Poly "entre la terminale et les CPGE scientifiques", Lycée Louis Le Grand.
- bac, AMPEP
- Hyperbole