La construction des objets mathématiques

Analyse philosophique

Guy Wallet

octobre 2008

Exposé aux journées de l'APMEP
25-27 octobre à La Rochelle

Le but de cet exposé est de présenter un point de vue à propos des objets mathématique, sur leur nature et leur construction. En rupture avec les idées courantes sur les mathématiques, ce point de vue apporte une lumière nouvelle sur quelques vieilles questions. Il s'agit d'un travail de nature philosophique mais qui est porté, repris à son compte par moi-même qui suit avant tout un mathématicien. En aucun cas je ne prétends être un philosophe, avec tout ce que cela suppose comme culture et pratique d'une discipline dotée, comme les mathématiques, d'une longue et riche histoire. Pour tout dire, mon métier et ma grande occupation actuelle sont avant tout la recherche et l'enseignement des mathématiques dans lesquels je suis encore très investi.

C'est donc de l'intérieur de l'édifice des mathématiques que je parle, ce qui d'une certaine manière est un avantage. Néanmoins, il est clair que le statut de mathématicien ne suffit absolument pas pour accéder à une analyse philosophique et critique des mathématiques qui soit quelque peu consistante. Il suffit de fréquenter les départements de mathématiques universitaires pour savoir que, lorsqu'ils cessent de faire les choses sérieuses pour lesquelles ils sont rémunérés, les mathématiciens comme tous les hommes ne sont pas avares de banalités et de lieux communs, même et surtout quant ils prétendent philosopher sur leur discipline.

De fait, les sources principales de mon travail sont doubles : à ma propre pratique et sensibilité de mathématicien se rajoute la lecture de deux philosophes contemporains qui nourrissent mes réflexions depuis de nombreuses années : L. Wittgenstein [5, 6] d'une part et W.V.O Quine [1, 2] d'autre part. Le premier a développé une forme d'interrogation philosophique sans système et sans thèse profondément originale et déstabilisante, le second a bouleversé la philosophie des sciences du 20-ieme siècle par ses thèses sur l'indétermination de traduction, la sous-détermination de la théorie par l'expérience, la relativité de l'ontologie et le holisme épistémologique. Bien que dans la forme comme dans le fond, les travaux de ces deux penseurs peuvent sembler relativement opposés, j'y ai trouvé au contraire une certaine complémentarité.

Ce travail reprend en partie les arguments que j'avais développés dans des travaux précédents, en particulier *Réflexions sur l'objectivité en mathématiques* [3] et *Signification* *et démonstration* [4]. Néanmoins, il comporte des développements nouveaux motivés par la volonté d'apporter une réponse plus satisfaisante et moins dogmatique au problème posé par le caractère étrange du lien que la mathématique entretient avec la réalité. La composante nouvelle consiste à rompre le splendide isolement dans lequel nous avons trop tendance à penser cette discipline. Au contraire, je souhaite montrer tout l'intérêt qu'il y a à arrimer fermement les mathématiques à l'ensemble de notre appareil scientifique, sans pour cela en gommer la spécificité. Les arguments développés dans les parties 1, 2 et 4 ont déjà été présentés lors d'une rencontre à la mémoire de J. Harthong à Strasbourg en 2003.

1 Une expérience sur l'objectivité en mathématiques

Lors de discussions philosophiques, il est fréquent que soit affirmée l'existence en mathématiques d'un contenu sémantique indépendant du formalisme. Cela semble fonder une forme d'objectivité analogue à celles des sciences expérimentales sur le mode de la physique du 19eme siècle : une discipline scientifique avec son harnachement théorique et technique découvrant peu à peu les propriétés d'une réalité objective pensée comme radicalement séparée et préexistant à la démarche d'investigation.

Pour illustrer ce point de vue, on peut imaginer une expérience ayant pour but de montrer l'objectivité d'une entité ou d'une propriété mathématique. Prenons l'exemple du nombre π dont l'objectivité devrait pouvoir être vérifiée par une véritable expérience : on implémente sur deux ordinateurs deux algorithmes de calcul des décimales de ce nombre. Ces algorithmes sont choisis pour leur efficacité mais aussi parce qu'ils sont radicalement différents dans leurs structures mathématiques. Le résultat de ce qui se donne comme une *"authentique expérience de physique"* est l'inéluctable identité des résultats : les deux algorithmes donnent la même suite empirique de décimales. Cette régularité observée est l'indice d'une réalité objective, d'*"une loi de la nature des nombres"* et par exemple, *"le fait que, la* 27 243*-ieme décimale de π soit 8 est une propriété objective de π"*.

Que penser de cette preuve expérimentale de l'objectivité de π ? A ce propos, il est éclairant de reprendre l'expérience précédente mais en lui imaginant une autre issue. Que se passerait-il si les deux algorithmes donnaient des résultats différents, par exemple si systématiquement on obtenait 0 par le premier dispositif et 8 par le second pour valeur de la 27 243-ieme décimale de π ? Il est aisé de s'imaginer que l'expérimentateur va commencer par mettre en doute l'écriture des deux programmes qui sont censés réaliser la transcription des deux algorithmes. Ce doute est tout à fait légitime car, contrairement aux textes mathématiques, un programme informatique est un authentique morceau de langage formalisé et pour peu que l'algorithme soit conséquent, on a de grandes chances de commettre des erreurs lors de la transcription dans un langage de programmation. En ce sens, l'expérience est un test empirique sur l'exactitude des deux programmes. Si la qualité des programmes semble irréprochable à l'expérimentateur, il est tout aussi concevable qu'il va mettre en cause la fiabilité du matériel utilisé (c'est-à-dire les deux ordinateurs). Maintenant, l'expérience s'interprète comme un bon test technique sur la qualité des ordinateurs. Ce qui est remarquable, c'est que le doute n'ira pas au delà, c'est-à-dire ne le conduira pas à mettre en doute la propriété de l'objet que la pseudo-expérience était prétendue vérifiée.

Pourquoi ? Parce qu'il s'agit d'une *propriété mathématique*, d'une proposition obtenue au terme d'une démonstration affirmant que les deux procédure de calcul doivent donner le même résultat. Le propre d'une démonstration est que, lorsqu'elle est reconnue comme telle, elle a pour effet que sa conclusion est exclue du doute de manière radicale. Ceci n'est pas une affirmation sur la valeur universelle des démonstrations ; c'est plutôt une constatation sur l'usage que nous en faisons et donc sur leurs rôles dans le fonctionnement de notre schème conceptuel.

Que peut-on en déduire sur l'objectivité du nombre π ? Force est de constater qu'elle est de toute autre nature que celle attribuée aux objets concrets, du fait même que les soi-disantes propriétés de cet objet sont irréfutables par un dispositif expérimental. Il s'agit en quelque sorte d'une super-objectivité, dure et intangible, se manifestant par des propriétés exactement représentables par nos langages théoriques. Est-il justifié d'employer le même terme d'objectivité dans des usages aussi différents ? De plus, peut-on qualifier d'expérience un processus dont on sait à l'avance ce qu'il doit donner, au point que l'obtention d'un autre résultat est inimaginable ? Selon l'usage, une expérience se construit sur la base d'une théorie qui la structure. La théorie permet de formuler des propriétés hypothétiques et l'expérience a pour but de vérifier la qualité descriptive des hypothèses. Mais dans le cas de π, il y a une totale adéquation entre l'objet et ses propriétés, si bien que l'expérience se vide de tout contenu, n'a plus aucun sens, sinon celui de tester un dispositif électronique ou la justesse d'un programme.

Tout ceci montre la forte spécificité des objets et des propriétés mathématiques : leurs rôles dans notre schème intellectuel fait qu'il est difficile de les interpréter comme décrivant des données et des propriétés du monde. Ils participent à notre description et structuration du champ empirique car ils nous offrent des points d'ancrage intangibles sur lesquels nous pouvons arrimer nos propositions descriptives. Manifestement, ils appartiennent à l'appareillage normatif de notre système de connaissances.

2 Le statut commun des objets de la science

Il est tentant de passer de l'affirmation de la forte spécificité de l'objectivité en mathématique et des objets mathématiques à celle selon laquelle les mathématiques sont sans ontologie, c'est-à-dire n'ont pas vraiment d'objets, du moins au sens où les autres sciences comme la physique par exemple en ont. L'argumentation qui suit a pour objet de montrer que ce glissement est injustifié et qu'en fait, il n'y a pas une coupure aussi radicale que l'analyse précédente pouvait le laisser entendre entre les mathématiques et les autres sciences.

Tout d'abord, il faut interroger l'idée commune selon laquelle les objets d'une théorie scientifique sont des entités extérieures à la théorie, situées dans le monde des choses perceptibles et concrètes, préexistant dans cette réalité extérieure à l'effort de représentation théorique. Cette vision simpliste institue une différence de genre entre les objets concrets et les objets abstraits puisque justement ces derniers sont entièrement dépendants de nos modalités de représentation. Il n'est pas difficile de critiquer ce point de vue, et pour cela, il suffit de mettre en évidence l'extrême variété de statut des objets physiques.

S'il est vrai qu'il existe des *objets physiques ordinaires* extrêmement familiers, auxquels nous avons clairement accés par nos sens, il en est d'autres que l'on pourrait appeler *objets physiques conjecturaux* nettement plus éloignés sinon totalement coupés de nos facultés de perception. Ces derniers n'en sont pas moins des objets véritables des sciences de la matière. Il y a dans l'ensemble des objets rencontrés ou postulés par la démarche scientifique toute une graduation qui part des objets concrets ordinaires pour aller aux objets physiques extraordinaires (c'est-à-dire n'appartenant pas au catalogue des objets physiques ordinaires dont parle le langage ordinaire).

Ce qui semble particulariser les objets physiques extraordinaires, c'est que leur existence est postulée dans le cadre d'une théorie explicative vérifiée par l'expérience. Mais à y regarder de plus près, même les objets physiques ordinaires sont entièrement dépendants de la théorie naïve de l'espace physique qui nous environne, théorie qui s'est constituée au fil de l'évolution que se soit globalement au niveau de l'espèce ou individuellement au niveau de l'apprentissage par l'enfant de son langage et de l'environnement. En ce sens, les objets physiques extraordinaires sont à peu près sur le même pied que les objets physiques ordinaires. Le fait de poser un objet physique extraordinaire est un analogue du fait de poser ou reconnaître les choses ordinaires : le physicien le fait de manière explicite pour des raisons reconnues alors que l'hypothèse des choses ordinaires est ensevelie dans l'histoire de chaque individu et dans la préhistoire de l'humanité si ce n'est de l'espèce animale.

Les objets physiques tant ordinaires qu'extraordinaires sont moins que déterminés par nos multiples contacts sensoriels avec la réalité. L'ensemble de la connaissance humaine, des faits les plus anecdotiques aux lois physiques les plus profondes, est comme une étoffe tissée par l'homme, étoffe dont le contact avec la réalité ne se fait qu'en bordure. Cet ensemble de connaissances comprend évidemment les mathématiques comme une composante liée à toutes les autres avec la caractéristique forte d'être très éloignée du contact avec l'expérience. La science totale est comparable à un champ de forces dont les conditions limites imposées le sont sur le bord par l'expérience et l'observation de la réalité. Dans chaque énoncé scientifique, il est difficile sinon impossible de séparer ce qui provient de l'expérience de ce qui appartient à notre harnachement conceptuel (en particulier logico-mathématique). L'une des conséquences est que, en cas de conflit entre la réalité-expérience et l'édifice théorique, nous avons une grande liberté de choix quant à la manière et à l'endroit où nous allons procéder au remaniement de notre schéma de connaissance.

Pour cette raison, il n'y a aucune raison d'établir une différence radicale entre les objets concrets et les objets abstraits. Tous les objets (physiques ordinaires, physiques extraordinaires, abstraits formels) sont des entités dont nous postulons l'existence dans le but ultime de rendre plus efficace notre représentation du monde. Du point de vue épistémologique, les objets postulés par la connaissance scientifique sont comparables aux dieux de la mythologie antique ; la différence est que le corps des connaissances qu'ils permettent de structurer est pour nous infiniment plus opératoire que celui basé sur les dieux d'homère. C'est pour cela que nous y croyons alors que nous ne croyons plus aux dieux d'Homère. Poser un objet, c'est accorder l'existence à une chose dans le cadre d'une théorie s'insérant elle-même dans l'ensemble de notre connaissance scientifique. Ce qui en résulte n'est pas une objectivité au rabais mais la forme même de l'objectivité : tout objet est à la fois chose postulée du point de vue épistémologique sur la construction de notre schème conceptuel et chose réelle du point de vue interne à notre schème conceptuel.

Ce statut commun de tous les objets de la science, des objets physiques concrets aux objets abstraits logico-mathématiques, n'exclue pas de fortes différences. Les objets physiques ordinaires et proches de l'ordinaire sont fortement liés au corps des expériences et de l'observation ; leurs propriétés héritent de cette dépendance et sont d'autant plus sujettes à révision en cas de conflit entre la théorie et l'expérience. A l'opposé, les objets mathématiques ont un lien extrêmement lointain et indirect avec le champ de l'expérimentation. De ce seul fait, leur révision est difficilement pensable et serait beaucoup plus coûteuse puisque cela aurait des répercussions dans tout l'édifice de notre connaissance. Bien que principiellement possible, le caractère improbable de la révision des propriétés démontrées des objets mathématiques justifie la stratégie scientifique qui consiste à s'appuyer complètement et fermement sur les propriétés mathématiques pour procéder à tel ou tel réajustement de notre théorie du monde. Ce n'est qu'en cas de crise scientifique majeure et insurmontable par d'autres moyens que pourrait être envisagée la remise en cause d'une propriété mathématique ou logique établie.

Appliqué aux mathématiques, le holisme épistémologique qui inspire les réflexions précédentes consiste à insister sur l'inséparabilité des mathématiques avec le reste des connaissances scientifiques. Ceci présente de nombreux avantages sur le plan philosophique, en particulier de rendre relativement dérisoires certaines options extrêmes développées dans le cadre d'une réflexion se cantonnant aux seules mathématiques. En effet, pourquoi et comment soutenir sérieusement la solution formaliste (l'objet des mathématiques est l'ensemble des assemblages de symboles construits selon certaines règles formelles) ou la solution platonicienne (l'objet des mathématiques est un ensemble d'entités immatérielles préexistant à nos investigations) lorsque l'on garde en mémoire les liens et le rôle des mathématiques du point de vue de l'ensemble de la connaissance scientifique ? **Toute recherche interne au champ des mathématiques d'une objectivité inattaquable justifiant la certitude absolue attachée à cette sciences est vouée à l'échec.** Même l'option constructiviste pour laquelle j'ai beaucoup d'intérêt mathématique et philosophique nous égare lorsqu'elle prétend, par une pure réflexion interne, déterminer un niveau d'objectivité absolue pour les mathématiques. Cette critique philosophique ne porte pas sur les pratiques mathématiques apparentées que sont d'un part le formalisme (ou la méthode axiomatico-formelle) d'autre par le constructivisme (ou la mathématique effective) ; pour des raisons différentes, ces méthodes sont riches, intéressantes et parfaitement légitimes mais aucune ne peut prétendre définir dans l'absolu la forme d'objectivité définitive qui caractériserait les mathématiques indépendamment de tout l'appareillage de notre connaissance scientifique. Bref, la mathématique est embarquée dans le même bateau que l'ensemble de la science, avec tout ce que cela comporte de certitudes et d'incertitudes, de stabilité et de possible révision, et nous n'avons pas le pouvoir de nous en échapper, sauf peut-être à nous transformer en une branche de la théologie.

3 Quels sont les objets légitimes d'une théorie ?

Une nouvelle critique peut être maintenant adressée au développement précédent : nous avons utilisé massivement et sans aucun recul critique une notion un peu vague, à savoir celle *d'objet d'une théorie*. En particulier, on peut se demander si nous ne nous sommes pas laissés prendre par la tentation d'une prolifération d'objets à la fois surabondants et hétéroclites. Cela serait manifestement en contradiction avec un principe implicite de la démarche scientifique usuelle selon lequel il faut veiller à n'introduire dans nos théories explicative qu'un nombre minimum d'entités nouvelles.

Chemin faisant, on rejoint ainsi un grand problème de l'interrogation philosophique traditionnelle situé dans le domaine de *l'ontologie* (la science ou l'étude de l'être) et qui consiste à articuler intellectuellement la sempiternelle question :

Qu'est-ce qu'il y a ? Qu'est-ce qui existe ?

Remarquons qu'à cette question chacun est en droit de répondre

Tout.

c'est-à-dire

Existe tout ce qui est requis par mon propre système d'explication et de croyance à propos du monde.

Cette unanimité dans la forme de la réponse laisse place à de nombreux désaccords lorsqu'il s'agit de confronter le détail de nos ontologies, pour autant que l'on soit capable de les expliciter. Et ainsi, cette question ne cesse de se poser depuis des siècles.

Quine propose de nous sortir de cette confrontation interminable en passant à la question de nous assurer, non pas de ce qui existe mais des imputations d'existence. **Plutôt que de se demander ce qui existe dans un absolu essentiellement indécidable, il est plus intéressant de s'interroger sur ce que telle ou telle démarche théorique présuppose comme existence d'entités spécifiques.** Il ne faut pas croire que cette nouvelle question admette des réponses faciles car les imputation d'existence sont généralement implicites, cachées et ou ambiguës. Pour montrer qu'une théorie suppose un objet donné ou une classe d'objets, nous devons montrer que la non existence de ces objets rendrait d'une certaine manière fausse ladite théorie. Les vrais objets d'une théorie sont donc les entités réellement requises par cette théorie, celles dont elle ne peut se passer sans se vider d'une partie de son sens. Selon Quine, toute théorie procède à une forme véritable d'**engagement ontologique**. Le problème est maintenant de savoir à quoi se révèlent les exigences d'existence d'une théorie donnée.

Comme il en a l'habitude dans d'autres secteurs, Quine se propose de traiter cette question dés le niveau du langage ordinaire conçu comme la matrice de tous les discours théoriques plus évolués. Est-il possible d'identifier au sein du langage ordinaire les canaux par lesquels se fait incontestablement l'appel à la référence extérieure, c'est-à-dire l'imputation d'existence porté par ce discours ?

Il est tentant de répondre qu'une théorie s'engage sur l'existence d'une entité lorsqu'elle lui affecte un nom propre. Transposée dans les mathématique, cette thèse revient à ne reconnaître comme objet mathématique que les entités individuellement nommées comme 0, 1, π, e, ln, $L^2(\mathbb{R})$, etc.. Cette réponse simple n'est pas satisfaisante pour de nombreuses raisons, l'une d'elle étant qu'il semble nécessaire de nommer quelque-chose pour affirmer ensuite que cette chose n'existe pas. En effet, moi l'orateur, je peux tout autant dire que

Prune est ma petite fille et elle a 6 ans.

ou que

Pégase est le cheval ailé de la mythologie grecque.

Il est clair qu'en ce qui me concerne, si l'engagement ontologique est clairement présent dans la première affirmation, il est pour le moins contestable dans la seconde. La difficulté est que, dans nos discours ordinaire ou théoriques, il y a toute une multiplicité de procédés disparates qui semble indiquer de manière plus moins ambiguë une forme de référence à des objets.

Il est impossible de rendre compte en peu de temps de l'ensemble du travail minutieux et complexe effectué par Quine pour étudier les mécanismes de la référence extérieure dans nos discours. En deux mots, le point central de sa méthode est ce qu'il a appelé **la paraphrase dans une notation canonique**. Il s'agit d'un travail de clarification qui, appliqué à un énoncé donné, se déroule en deux temps : (1) paraphrase de l'énoncé initiale dans une notation proche de cette de la logique des prédicats du 1er ordre, (2) analyse de l'énoncé obtenu dans la nouvelle notation.

Par exemple, la phrase

L'idée que vous m'avez suggérée hier. (1)

contient ce que l'on pourrait appeler un nom descriptif complexe qui clairement, prétend nommer une entité bien définie. A la suite de Russel, on peut paraphraser l'énoncé en

Quelque chose est une idée et vous m'avez suggérée cette chose hier. (2)

Cette formulation est certes maladroite. Elle a cependant l'intérêt de déplacer le mécanisme référentielle qui occupait l'ensemble de la phrase (1) vers la seule expression générique *"quelque chose"* de la phrase (2) ainsi que son rappel *"chose"*. On peut aller plus loin dans le formalisme en reconnaissant dans cette construction une forme de variable liée à un quantificateur, d'où la paraphrase dans l'esprit de Quine :

$$(\exists x) \quad \textit{(x est une idée) et (vous m'avez parlé de x hier)}$$

Dans cette notation semi-formelle, le canal de la référence se fait uniquement par le truchement de la variable liée x.

Quine a montré que cette forme de paraphrase peut se généraliser à l'ensemble des procédés référentiels du discours ordinaire. Il en découle l'une des grandes thèses de Quine qu'il a condensée dans la formule lapidaire

Être, c'est être la valeur d'une variable liée.

Autrement dit, **une entité a est requise comme objet d'une théorie $\mathcal{T}$ si et seulement si a apparaît, dans une proposition valide de $\mathcal{T}$ convenablement paraphrasée, comme valeur d'une variable x liée par un quantificateur universel** $(\exists x)$.

En conclusion, tout discours est porteur d'un engagement ontologique, et la méthode de Quine est un moyen de nous mettre d'accord sur l'étendue de cet engagement. A la lumière de ce critère, qui à vrai dire est le seul un peu sérieux que je connaisse, on peut vérifier que la notion d'objet largement utilisée dans la partie précédente n'est pas mise en défaut.

4 Retour sur l'expérimentation en mathématiques

On a montré précédemment qu'une expérience ne peut pas avoir pour but la vérification d'une proposition démontrée du fait que cette dernière acquiert un statut d'intangibilité qui la rend largement impropre à être l'objet d'une expérience. Bien au contraire, une proposition démontrée, c'est-à-dire un théorème, constitue dans le dispositif de la connaissance scientifique un point d'appui considéré comme absolument sûr à partir duquel on peut interroger la plausibilité d'autres énoncés qui eux sont hypothétiques.

Il existe une situation plus troublante sur le plan philosophique à propos des rapports entre expérience et propriété mathématique : c'est le cas où l'expérience porte sur une proposition mathématique non encore démontrée. Cette situation est très fréquente. Par exemple, on peut imaginer un proposition arithmétique $\mathcal{P}(n)$ telle que
- on ne sait pas démonter $\forall n \;\; \mathcal{P}(n)$
- pour tout nombre entier naturel n que nos moyens de calcul effectif nous permettent d'utiliser, on vérifie que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Pour prendre un exemple actuel, on peut penser à la conjecture de Goldbach qui stipule que tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers, ce qui revient à prendre pour $\mathcal{P}(n)$ l'énoncé :

Il existe deux nombres premiers p et q tels que $2n + 4 = p + q$.

La vérification à l'aide d'un ordinateur de la véracité de $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$,..., $\mathcal{P}(1000)$,..., ressemble irrésistiblement à une *expérience cruciale* de la physique ; par là j'entends un procédé qui met en évidence une régularité imprévue et donc non encore codifiée par une loi[1]. Dans notre situation, on est fortement tenté de voir notre calcul comme une véritable expérience mettant en évidence la propriété mathématique *"tous les nombre entiers naturels n satisfont la propriété $\mathcal{P}(n)$"*. Cette propriété étant non démontrée, elle semble manifester l'existence d'une *réalité mathématique préexistant à la mise au point de nos arguments démonstratifs.* Cela mérite assurément d'y regarder de plus près. Contrairement à ces évidences, je crois pouvoir affirmer que l'expérience considérée ne porte pas sur la proposition en question pour les raisons qui suivent.

[1]Le sens habituel de cette terminologie est plutôt celui d'une expérience permettant de trancher entre deux hypothèses contradictoires

En cas de découverte d'une démonstration prouvant la proposition, l'expérience sera balayée, affectée du statut mineur d'une simple illustration sans aucune mesure avec le poids de certitude apportée par la preuve. Si au contraire, surgit une preuve que la proposition est fausse, l'effet sur la valeur de la soi-disante expérience sera encore plus dévastateur pour des raisons évidentes. Remarquons en passant que cette deuxième situation est relativement fréquente dans le processus de l'avancement de la recherche en mathématiques. La preuve met alors en évidence en quoi l'expérience ne portait pas vraiment sur la proposition. J'ai personnellement connu ce type de revirement lors d'une recherche sur le comportement d'un système dynamique ; avant l'apparition de la preuve, nous pensions sur une base expérimentale que tel phénomène se présentait sous certaines hypothèses de régularité. La preuve, qui de fait a été tout autant imprévue que cruciale, à mise en évidence qu'il fallait imposer une régularité beaucoup plus forte. Il s'est avéré après coup que l'expérience s'était toujours involontairement placée dans le cadre de cette régularité restrictive.

Il est remarquable que dans le cas où la preuve met en défaut la conclusion de l'expérience, la "réalité mathématique objective" que l'expérimentation prétendait avoir dévoilée est immédiatement oubliée. A l'opposé, si la preuve conforte le résultat expérimental, nous nous croyons autorisé à en tirer de grandes leçons épistémologique sur la préexistence d'une réalité objective mathématique. Cette dissymétrie est pour le moins curieuse et devrait inciter le philosophe à un minimum de prudence.

Tout ceci est lié au fait qu'en l'absence d'une démonstration, une proposition mathématique a un statut très particulier car, n'étant pas reliée en amont à un système englobant, elle est dotée d'un sens fondamentalement inachevé. C'est une conjecture dont l'effet est, pour les mathématiciens, d'une invitation à lui trouver une signification complète. A supposer que ce travail soit accompli un jour, nul ne peut préjuger à l'avance ce qu'il faudra inventer et créer pour cela.

Par exemple, on peut vérifier expérimentalement le théorème de la valeur intermédiaire

> *Pour toute fonction continue* f *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0)f(1) < 0$*, il existe* $x \in [0,1]$ *vérifiant* $f(x) = 0$*.*

en mettant en œuvre l'algorithme de dichotomie. On peut ensuite donner une preuve de ce théorème en montrant que l'algorithme précédent converge. Il n'est pas anodin de noter que cette preuve se place dans le cadre de l'analyse classique. En effet, on peut aussi montrer que cette proposition est constructivement erronée[2] et ensuite analyser pourquoi l'expérimentation précédente n'a aucune valeur sur le plan de l'analyse constructive[3]. Face à ces deux interprétations théoriques contradictoires, on se demande bien quel pourrait être "le fait mathématique indépendant de tout formalisme et de toute théorie" attaché à cette proposition ? Peut-on lui attribuer un contenu sémantique indépendant de ce que nous sommes prêts à recevoir comme preuve ?

De manière générale, il n'est pas juste de dire qu'une expérience porte exactement et seulement sur une proposition isolée. Pour reprendre une formule de Quine, **c'est l'ensemble de notre système de connaissance qui se présente en bloc devant le**

[2]Interprété dans le cadre de l'analyse constructive, le "théorème" de la valeur intermédiaire est faux.

[3]Le test de comparaison des nombres réels qui intervient de manière essentielle dans la méthode de dichotomie n'est pas algorithmiquement fondé.

tribunal de l'expérience. Dans le cas d'une proposition mathématique, l'expérience met en jeu l'ensemble de l'édifice théorico-expérimental et plus particulièrement les multiples liens lointains et indirects qu'entretient la proposition avec le monde empirique. Ou encore si on préfère, l'expérience porte sur la manière dont la proposition incriminée interagit avec certains dispositifs matériels et théoriques via l'ensemble complexe des connexions qui constituent notre système scientifique global. C'est cette interaction qui est le véritable objet de l'expérience et il est notable que cette dernière change de nature selon que la proposition est démontrée ou non. Ceci ne signifie pas que l'expérimentation n'a aucune valeur en mathématiques mais qu'elle n'a pas le pouvoir de nous faire accéder à une quelconque réalité mathématique pure et isolée dans la globalité de notre système scientifique.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons commencé par remarquer la forte spécificité de l'objectivité en mathématiques qui se manifeste de manière éclatante dans le rôle qu'occupe une proposition mathématique démontrée dans une expérimentation mettant en jeu cette proposition. Ensuite, il nous a fallu couper court à une interprétation dogmatique de cette constatation en montrant comment tous les objets de la science partagent le statut de choses posées dans le cadre d'une théorie qui structure notre vision du monde. **L'objectivité n'existe que du point de vue interne à une telle théorie, et de fait, elle comporte une composante mathématique. Cette dernière est inséparable de l'objectivité des objets tant ordinaires qu'extraordinaires de la physique. Les nombres, les fonctions, les groupes et les espaces topologiques existent comme les molécule, les atomes, les quarks, les hadrons et autres gluons, parce que nous le postulons et utilisons ces entités comme ingrédients indispensables à notre théorie globale du monde physique. De ce fait, ils sont parfaitement objectifs et nous n'avons nul besoin de leur inventer une forme d'objectivité particulière.**

Références

[1] W.V. QUINE, *Le mot et la chose*, Collection Champs, Flammmarion, Paris 1999.

[2] W.V. QUINE, *La poursuite de la vérité*, aux Editions du Seuil, Paris 1993.

[3] G. WALLET, *Réflexion sur l'objectivité en mathématiques* dans *Le labyrinthe du continu*, H. Sinacoeur et J.M. Salanskis (Ed), Springer France, Paris 1992.

[4] G. WALLET, *Démonstration et signification en mathématiques*, Séminaire de Philosophie et Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, publié par l'IREM de Paris-Nord, N° 84, 1993.

[5] L. WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Editions Gallimard, Paris 1983.

[6] L. WITTGENSTEIN, *Recherches Philosophiques*, Editions Gallimard, Paris 2004.