LE ROLE DE L'INTUITION DANS LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Sylvain Monturet

Le raisonnement par récurrence en mathématiques est doublement problématique : sa caractérisation et son statut constituent chacun une difficulté, non seulement pour l'enseignement des mathématiques mais aussi plus largement du point de vue épistémologique. Si l'on essaie, au moins en même temps qu'on en transmet le concept, de donner des images, des représentations pratiques du raisonnement par récurrence, pour en faire saisir le sens, on s'expose très souvent à l'échec. Il en va ici de la nature de la représentation du raisonnement par récurrence. Nous allons montrer que pour saisir le sens du raisonnement par récurrence il ne suffit pas de se le représenter par une image. L'enjeu réside, d'une part, dans l'explicitation de la spécificité des problèmes du raisonnement par récurrence pour chacune des approches intuitionnistes, logicistes et formalistes. Il faudra, d'autre part, déterminer le statut de l'intuition en mathématiques. Enfin, nous serons amenés à réfléchir sur l'origine de la créativité en mathématiques.

Nous montrerons, tout d'abord qu'on ne peut se représenter par une intuition une déduction, car ce sont deux types de connaissances élémentaires et distincts. Pourtant, nous montrerons, dans un deuxième temps qu'on peut légitimement se représenter, en partie, le raisonnement par récurrence par une intuition de l'esprit - et non par une intuition sensible - à une triple condition : que l'on pense ce raisonnement comme une infinité de syllogismes ; que l'on assume deux conséquences ontologiques et épistémologiques : le rejet de la réduction du raisonnement par récurrence à une forme de raisonnement sans contenu (contre le formalisme) et la reconnaissance du rôle de l'intuition dans les mathématiques (contre le logicisme) ; et enfin, que l'on reconnaisse qu'une pensée de la composition du continu proposant une image du continu, ne suffit pas à nous donner une intuition du continu.

Si, en effet, la forme de raisonnement que constitue le raisonnement par récurrence est complexe et difficile à admettre, c'est d'abord, semble-t-il, parce qu'elle est contre-intuitive. L'enjeu est de déterminer si l'on peut faire correspondre ce raisonnement à une intuition, ordinaire ou spécifique. Chercher une intuition adéquate à un raisonnement déductif, fini, dont les étapes sont distinctes, semble vain au premier abord. Le problème est, plus largement, celui de l'exclusion a priori de toute intuition dans un raisonnement déductif.

On peut formuler le raisonnement par récurrence en distingant trois étapes : l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Si pour un entier 0, P(0) est vraie (initialisation)	Soit un nombre n tel que P(n) est vraie
Et si *pour tout* $n \geq 0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* (***hérédité***)	Montrons que P(n+1) est vraie
Alors pour tout $n \geq 0$, P(n) est vraie (conclusion)	.... *(On peut démontrer que P(n+1) est vraie)*

Formellement, nous pouvons l'écrire encore ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c} P(0) \\ \forall n\, P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ \forall n\, P(n) \end{array}}$$

Mais la grande variété des dénominations de ce raisonnement indique, à elle seule, un problème quant à son statut. Ainsi, on le nomme tantôt principe de raisonnement par récurrence, tantôt axiome de récurrence ; on le nomme encore principe de démonstration par récurrence, principe de récurrence, ou simplement raisonnement par récurrence. Il nous semble que c'est bien parce qu'il est pour la pensée un objet spécifique que son statut pose problème. Ce raisonnement par récurrence a, en effet, une triple spécificité.

D'une part, il est, par définition, déductif : en donner une image ne peut aider à sa compréhension, mais ce ne peut être au mieux qu'un outil mnémotechnique. Cela permet de mémoriser une procédure et non de saisir le sens du raisonnement par récurrence. Une image aurait pour fonction, au mieux, d'illustrer un raisonnement, de donner un exemple d'application. D'autre part, il est caractéristique du raisonnement mathématique en tant que tel - Poincaré le considère même comme le raisonnement mathématique par excellence. Il a donc un contenu singulier et il atteste, par ailleurs, du rôle de l'intuition en mathématiques. Enfin, nous verrons en quoi il engage une conception spécifique du continu en mathématiques.

On ne peut se représenter par une intuition une déduction telle que le raisonnement par récurrence. L'intuition et la déduction sont, en effet, deux types de connaissances distincts et élémentaires. La définition que Descartes, par exemple, donne de la déduction se caractérise par un mouvement continu et ininterrompu de la pensée qui ne voit pas en même temps toutes les étapes de ce mouvement : "*(...) par déduction nous entendons par là tout ce qui se conclut nécessairement de certaines autres choses connues avec certitude*"[i]. C'est un mouvement qui ne peut saisir d'un seul coup d'oeil l'ensemble de la déduction mais qui sait que le dernier anneau de cette chaîne de raisons est lié au premier avec certitude. Ce savoir suppose, ainsi, la mémoire de la validité des étapes du raisonnement ; il y a ici un aspect psychologique déterminant pour le raisonnement mathématique. Certes, le nombre des anneaux dans un raisonnement par récurrence n'est pas limité, il est indéfini. D'une certaine manière, il ne comprend qu'un seul anneau. En cela la déduction se distingue du raisonnement par récurrence - ou de l'induction complète[ii]- qui implique, quant à lui, un nombre d'anneaux illimité. La nécessité de la conclusion de ce raisonnement par récurrence tient à la certitude des connaissances que nous avons posées dans les prémisses du raisonnement (l'initialisation). Mais, il y a quelque chose dans ce raisonnement qui échappe à l'intuition, qui impose de réfléchir d'une manière singulière. Par conséquent, l'écart qui existe entre le savoir et la saisie intuitive du raisonnement est problématique.

Sans doute faura-t-il admettre ici que l'image obscurcit notre rapport à la vérité. Certes, la certitude de l'intuition tient à son évidence, en revanche, celle de la déduction tient à la mémoire de l'évidence des raisons enchaînées par ce mouvement continu et ininterrompu de la pensée. Le raisonnement par récurrence n'est intuitif que s'il peut être saisi comme objet par la pensée, de le juger, de le concevoir. Telle est la thèse de Henri Poincaré : le raisonnement par récurrence est intuitif, mieux, il est le raisonnement mathématique par excellence. Il rend compte du fait que les mathématiques soient une création de l'esprit humain, puisque le raisonnement mathématique, selon lui, n'est pas seulement déductif. Ce raisonnement, singulier et au statut fondamental est à la fois rigoureux et fécond.

Si le raisonnement par récurrence échappe à l'intuition sensible, par définition, puisque c'est un raisonnement, il est abstrait, en revanche, on donne des images pour faire comprendre, pour enseigner ce raisonnement : l'escalier, l'échelle, les dominos, ou encore l'empilement de sucres. La question de leur intelligibilité se pose : nous nous proposons d'en examiner quelques-uns.

Dans l'exemple de l'escalier, on demande d'imaginer quelqu'un monter les marches d'un escalier à partir de la marche (en général la première pour simplifier). Cela suppose que les marches soient identiques et que le mouvement d'ascension soit isomorphe ou uniforme, rectiligne. Penser que, une fois la possibilité de l'ascension établie, elle ne s'arrête pas dès lors qu'elle est amorcée, est certes une image parlante mais, au fond, c'est une image moins éclairante que celle des dominos – que nous analyserons ci-dessous. L'image de l'escalier suppose un effort, une volonté, voire un choix dont on a du mal à admettre spontanément qu'ils ne soient pas libres, ou du moins contingents. Faire cette analogie pour aider à comprendre des rapports nécessaires entre les nombres semble donc inadéquat. Car, la continuité imaginée entre la vérité des propositions de la suite, à chaque rang de la suite, est pensée par analogie avec la continuité de la volonté de monter les marches. Or la récurrence, implique, au moins à un moment du raisonnement, une visée implicite de la totalité des nombres entiers, et de l'universalité d'une propriété arithmétique (hérédité). C'est sans compter sur le fait que l'impulsion de celui qui monte sur une marche de l'escalier, ou de l'échelle, n'a de commun avec l'impulsion de celui qui établit l'initialisation du raisonnement par récurrence que le nom. Il s'agit donc moins d'une analogie que d'une métaphore ici, car, il est moins question d'un rapport logique d'égalité que d'une association d'images, trompeuse par définition. Mais, il est vrai qu'elle est séduisante et stimulante : elle donne à voir autrement - mais à notre sens faussement, de manière trop approximative- un raisonnement complexe, dont le sens ne se donne pas aisément, ni directement.

L'exemple des dominos, quant à lui, pourrait être plus convaincant puisqu'il n'implique pas de volonté effective, contrairement à l'exemple des escaliers ou de l'échelle. Un mécanisme – réel ou fictif – suffit à donner la première impulsion, cause d'un mouvement qui se répète et se transmet intégralement d'un domino au suivant. Imaginons une suite de dominos alignés de la même manière, avec le même écart entre chacun des dominos. Il est facile de comprendre que la chute d'un domino entraîne celle du suivant et que la chute du domino suivant entraîne à son tour celle du domino qui le suit, etc... Si on constate l'existence d'un domino et si on observe que la chute d'un domino entraîne celle du suivant, on peut en conclure que le mouvement du premier domino entraînera la chute du domino suivant et ainsi de suite pour tous les dominos suivants. Or, la conclusion vaut non pas seulement pour tous les dominos suivants mais pour <u>tous</u> les dominos : c'est donc ici un saut théorique qu'il nous est demandé de franchir.

L'impulsion initiale se transmet d'un domino à l'autre et cause le même effet pour tous les dominos entraînés par le mouvement de la chute du premier domino – que celui-ci soit le premier ou le $n^{\text{ième}}$ domino de la suite de dominos intégralement. Tous les dominos ont donc la même caractéristique : ils reçoivent et transmettent l'impulsion du premier domino tombé. Cette caractéristique est générale certes, mais c'est une analogie trompeuse, à notre sens, que de considérer qu'elle est universelle ou qu'elle permette de comprendre que la caractéristique d'un rang d'une suite de nombres soit universelle. Il faut, en outre ici, admettre qu'il y a une infinité de dominos, et que la chute du premier domino sera répétée à l'identique pour chaque domino suivant – il ne peut donc s'agir que d'une expérience de pensée.

On pourrait peut-être ici proposer un autre exemple, de mouvement répété et transmis intégralement dans une suite ordonnée, à partir d'une impulsion. Demandons à un groupe de personnes de former un cercle puis demandons à l'une d'entre elles de pousser la personne à sa droite et donnons enfin comme consigne à tous que, s'il sont poussés par leur gauche, ils poussent la personne qui se trouve à leur droite. Le mouvement initié par la première personne sera répété et transmis à la totalité des personnes composant le groupe. Reste à imaginer qu'un groupe de personnes puisse être constitué d'une infinité de personnes (comptons les personnes disparues, les personnes vivantes et celles qui naîtront après nous), et que cette totalité soit réelle.

En résumé, saisir la vérité d'un raisonnement fini n'est pas la même chose qu'imaginer la continuité ou la transitivité d'un mouvement entre des choses homogènes et isomorphes, sans quoi on masque la représentation de la totalité des nombres entiers et du caractère universel de la proposition démontrée. On pense à un mouvement homogène, rectiligne, fictif en somme, qui suggère une continuité spatiale.

Tout ceci vaut pour le passage entre l'initialisation et l'hérédité dans le raisonnement par récurrence : ce sont deux étapes, distinctes dans le temps, qui, associées dans un raisonnement déductif, permettent de conclure une troisième étape : la démonstration de la nécessité de l'implication d'une proposition - P(n) - à une autre – P(n+1). La difficulté réside surtout dans la représentation du passage entre l'hérédité et la conclusion du raisonnement par récurrence. En somme, donner une image du passage entre l'initialisation et l'hérédité nous semble une analogie inadéquate puisqu'elle évacue la dimension du jugement par lequel on opère ce passage.

Reste à déterminer s'il y a dans ce jugement une place pour l'intuition. Autrement dit, il s'agit de savoir comment penser adéquatement le raisonnement par récurrence, puisque, si on en donne une image ou si on cherche une analogie, on s'éloigne de son sens. Considérons pour cela la définition que donne de ce raisonnement Henri Poincaré, dans la *Science et l'hypothèse*[iii] :

« On établit d'abord un théorème pour n = 1 ; on montre ensuite que s'il est vrai de n – 1, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers. »

Le raisonnement par récurrence a une extension universelle, c'est le quantificateur universel - *tous* - qu'utilise ici Poincaré. Il est donc nécessaire d'admettre, non pas une généralisation à partir d'un cas particulier, une image par exemple -les dominos, l'échelle...- mais une universalité à partir d'un cas singulier, spécifique qu'est ce raisonnement par récurrence. Le sens même du théorème est en jeu ici. L'intuition sensible n'est d'aucun secours, mais il ne faut pas renoncer pour autant à toute forme d'intuition dans ce raisonnement.

On peut légitimement se représenter le raisonnement par récurrence par une intuition de l'esprit et non par une intuition sensible à une triple condition :

1/ à condition de penser ce raisonnement comme une infinité de syllogismes de forme identique. Henri Poincaré, en effet, insiste sur le paradoxe auquel les mathématiques sont confrontées : si l'on cherche une telle intuition pour comprendre le raisonnement par récurrence il est difficile de rendre compte de l'exactitude et de la rigueur des mathématiques. Poincaré reconnaît, plus encore, dans ce raisonnement, la forme aristotélicienne par excellence du raisonnement : le syllogisme.

« Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.»

La condensation d'une infinité de syllogismes ne se fait pas automatiquement, ni mécaniquement, ni formellement. Le passage de la succession indéfinie de chaque syllogisme au théorème général ne peut se faire que par un jugement libre, une opération ou un acte de l'esprit. Cette opération est d'autant plus remarquable qu'elle porte sur une infinité de syllogismes : devant l'infini, en effet, le principe de contradiction[iv] est impuissant, de même que l'expérience. Reste cette règle qui, selon Poincaré, *"n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sent capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible."*[v]

Ce raisonnement est, pour Poincaré, le modèle de tout raisonnement ; il peut se concevoir comme une succession infinie – i.e. indéfinie – de syllogismes. Non seulement ce raisonnement a une portée universelle, mais il nous oblige à nous confronter à l'infini mathématique. Se représenter par une intuition le raisonnement par récurrence revient donc à se représenter une infinité de syllogismes – précisons : une infinité de syllogismes de forme identique. Reste à déterminer trois points : savoir si, d'une part, cette formule unique par laquelle on condense l'infinité de ces syllogismes s'obtient par une intuition, ou par une synthèse; savoir si, d'autre part, elle renvoie à une réalité ou bien si elle n'a de réel que le nom ; et enfin, déterminer si elle est le résultat d'une opération de l'esprit. Pour en saisir le sens, reprenons la définition qu'Aristote donne du syllogisme dans les *Premiers Analytiques* :

« Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données. »[vi]

Si le syllogisme apporte une connaissance c'est au sens où il fait voir, où il montre ou manifeste la cause de la conclusion. Montrer pourquoi la conclusion est vraie est le propre du raisonnement scientifique – de la démonstration au sens moderne du terme – selon Aristote. Il ne s'agit pas de produire une nouvelle connaissance, il n'y a rien à découvrir de nouveau si ce n'est concernant la cause des êtres, naturels ou artificiels. Aristote recherche, en effet, pourquoi les êtres sont tels qu'ils sont. La particularité et la fécondité de ce raisonnement réside donc dans la qualité logique et théorique de la déduction : à la fois cohérent, rigoureux et producteur de connaissance – toute connaissance étant d'abord connaissance du pourquoi et non du fait (du *dioti* et non du *oti*). C'est ce que la traduction – du même passage - par Michel Crubellier met mieux en évidence :

« La déduction est un discours dans lequel, certaines choses ayant été posées, une chose distincte de celles qui ont été posées s'ensuit nécessairement, du fait que celles-là sont. »[vii]

"Du fait que celles-là sont" indique la cause : c'est parce que certaines choses ayant été posées *sont* qu'une chose distincte d'elles s'ensuit logiquement et réellement. La cause porte sur les êtres réels et non sur leur désignations, leur appellations, ni sur leurs idées ou leurs images. Entre le langage – logos – et les choses réelles, il n'y a pas de distance, ni de différence ontologique, si bien que les catégories du discours sont celles de l'être et non de la pensée.

Si l'on veut formaliser le syllogisme on obtient par exemple :

(1) Tout A est B
(2) Tout B est Γ
(3) Tout A est Γ

C'est parce que (1) Tout A est B et que (2) Tout B est Γ que l'on peut en conclure logiquement et réellement que (3) Tout A est Γ. La relation de causalité entre les prémisses (1 et 2) et la conclusion (3) se fonde sur un intermédiaire : le moyen terme – le terme dans lequel réside la cause de la conclusion : B. Ce raisonnement est considéré par Aristote comme le moyen d'exposer la connaissance - celle du pourquoi- de faire voir la cause des choses et des êtres.

Si le raisonnement par récurrence est proche de ce raisonnement pourtant éloigné de notre épistémologie moderne, c'est au sens où il contient, de manière condensée, une infinité de syllogismes :

"Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade. Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.

Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.

Donc il est vrai de 2.

Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.

Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de n - 1, il l'est de n.

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures."

Il est, en effet, pour le moins surprenant que Poincaré réhabilite à sa manière un raisonnement que de nombreux philosophes ont condamné pour sa stérilité, en le réduisant à une rhétorique fondée sur une épistémologie fausse. Mais il s'agit surtout pour Poincaré de montrer que le raisonnement par récurrence est comme une *infinité* de syllogismes de forme identique : il cherche moins à comparer ces deux raisonnements qu'à montrer la spécificité du raisonnement par récurrence devant l'infini. Ainsi, l'infinité de syllogismes permet de s'élever du cas particulier au théorème général, de passer du fini à l'infini : mais, à notre sens, cela vaut seulement pour le passage de l'initialisation à l'hérédité constitutives du raisonnement par récurrence. Considérons sur ce point l'analyse que Poincaré fait de la démonstration leibnizienne de l'addition 2+2=4 [viii], il montre en quoi elle n'est pas une simple vérification, analytique et stérile, mais une véritable démonstration :

"Le débat est ancien ; déjà Leibnitz cherchait à démontrer que 2 et 2 font 4 ; examinons un peu sa démonstration.
Je suppose que l'on ait défini le nombre 1 et l'opération x + 1 qui consiste à ajouter l'unité à un nombre donné x.
Ces définitions, quelles qu'elles soient, n'interviendront pas dans la suite du raisonnement.

Je définis ensuite les nombres 2, 3 et 4 par les égalités :

(1) 1 + 1 = 2 ;

(2) 2 + 1 = 3 ;

(3) 3 + 1 = 4.

Je définis de même l'opération x + 2 par la relation :

(4) x + 2 = (x + 1) + 1.

Cela posé nous avons :

2 + 2 = (2 + 1) + 1 (Définition 4)

(2 + 1) + 1 = 3 + 1 (Définition 2)

3 + 1 = 4 (Définition 3)

d'où

2 + 2 = 4 CQFD"

Certes, l'égalité 2+2=4 est particulière et a pu pour cette raison être vérifiée, mais cela ne signifie pas que tout énoncé mathématique puisse être toujours vérifié ainsi, parce qu'il n'est pas d'abord un énoncé particulier mais universel :

"La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses"[ix]

Le caractère de généralité de la démonstration est justement ce que Russell juge faire défaut au raisonnement par récurrence, s'opposant ainsi à Poincaré. Dans un échange de textes publiés dans des Revues savantes, Poincaré répond au reproche de Russell[x] selon lequel le principe d'induction serait général, se réduisant à la définition du nombre entier :

" [...]le principe d'induction complète ne signifie pas, comme le croit M. Russell, que tout nombre entier peut être obtenu par addition successives, c'est-à-dire peut être défini par récurrence. Il signifie que sur tout nombre qui peut être défini par récurrence, on a le droit de raisonner par récurrence."[xi]

2/ On peut légitimement se représenter le raisonnement par récurrence par une intuition de l'esprit à condition d'assumer deux conséquences ontologiques et épistémologiques : le rejet de la réduction du raisonnement par récurrence à une forme de raisonnement sans contenu (contre le formalisme[xii]) ; et la reconnaissance du rôle de l'intuition dans les mathématiques (contre le logicisme[xiii]).

Ces deux interprétations concurrentes des mathématiques que sont le formalisme et le logicisme ont en commun une attitude critique envers l'usage de l'intuition dans la logique et dans les mathématiques : elles défendent l'idée qu'il faut raisonner en mathématiques sur des signes privés de toute signification et non sur des êtres mathématiques. Ses signes seront assemblés selon des règles qu'on construira, on proposera des axiomes, et à l'aide de règles rigoureuses on calculera les théorèmes. Leurs recherches portent en ce sens toutes les deux sur le fondement des mathématiques et de la logique. Elles veulent rendre sensible la raison humaine dans son langage propre.

Le formalisme - de Hilbert d'abord- et le logicisme – d'un Frege - se distinguent en revanche, en ce que, d'une part, le premier prétend que l'on peut réduire les mathématiques à la logique, et que la logique n'est affaire que de symboles mathématiques : on peut réduire ainsi l'ambiguïté du langage. Le formalisme se développera en même temps que l'axiomatique : il se donne pour projet de mathématiser la logique. Le second, d'autre part, revendique le développement autonome d'une logique mathématique, caractérisée par un ensemble de notions qui constituent des a priori de la pensée rationnelle. Il s'agit de fonder les mathématiques sur la logique, par une arithmétisation de l'analyse - Dedekind développera pour cela les notions d'ensembles et de fonction - ou en changeant de conception du nombre – Frege constituera à cette fin la notion d'application bi-jective.

Face au raisonnement par récurrence, ce deux positions se distinguent en ce que d'une part, les thèses formalistes de Hilbert, de Peano, de Bourbaki, ou de Boole, font du raisonnement par récurrence un objet hypothétique, logique mais qui ne correspond à rien de réel. Nous n'en avons pas d'intuition, ni sensible, ni intellectuelle. Il désigne au contraire des relations entre les choses et non pas les choses elles-mêmes. Le raisonnement par récurrence est donc ici une forme de raisonnement dont il est vain de chercher une intuition, un contenu concret auquel il réfèrerait. Sa vérité ne tient qu'à sa cohérence interne, logique ou formelle ; en aucun cas elle n'est due à sa conformité avec la réalité qu'elle désigne. Cette perspective est réaliste au sens où elle considère que le raisonnement par récurrence existe indépendamment de l'esprit qui ne fait que le redécouvrir : les concepts mathématiques sont indépendants de l'esprit. Or, le raisonnement par récurrence, même réduit à une induction finie, nous semble tout de même avoir un contenu - suivant en cela Poincaré- parce que l'intuition de l'esprit qui le conçoit vise un objet réel, même s'il est abstrait, à savoir *"la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience."*[xiv]Certes, cette intuition spécifique vaut pour le passage de l'initialisation à l'hérédité seulement; mais il atteste donc de la présence d'une intuition dans le raisonnement par récurrence, en particulier, et dans les mathématiques en général.

D'autre part, les thèses logicistes défendues par Frege, Russell ou Whitehead, aussi réalistes que celles des formalistes, rejettent tout rôle de l'intuition dans les mathématiques. Y recourir c'est provoquer des contradictions et des paradoxes. Frege rejette, en effet, l'emploi intuitif de notions logiques fondamentales, celle de répétition, notamment. C'est sur ce point que Russell s'est opposé à Poincaré dans un échange de lettres *via* la Revue *Mind* en 1905. La logique est une science dont la fonction est de contrôler et de systématiser l'emploi de l'intuition. Par ailleurs, le raisonnement par récurrence, pour Russell, est doublement général : parce qu'il constitue une affirmation sur tous les nombres entiers finis, qui peuvent être atteints par la répétition de n à n+1 ; et parce qu'il est également une affirmation sur toutes les propriétés qui appartiennent au suivant de n si elles appartiennent à n. Ce raisonnement vise le général et non l'universel ni une totalité réelle, que serait celle des nombres entiers. Il est une extrapolation d'un cas particulier et non la saisie d'un universel, ni celle d'une idée.

Avec Poincaré, nous pensons que pour déterminer dans le raisonnement par récurrence à quelle intuition il donne lieu, il faut distinguer, au préalable, deux types d'intuition : d'une part, l'intuition sensible qui soutient le raisonnement par l'imagination et fournit l'occasion de découvertes ; et, d'autre part, l'intuition de l'ordre des notions et des démarches mathématiques qui nous montre l'unité d'un raisonnement. Cependant, l'intuition ne fait pas partie du discours mathématique – celui-ci ayant une autonomie, une singularité non intuitive - et elle a une fonction philosophique comme référence à une réalité donnée :

"Ainsi la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique, qui peut seule donner la certitude, est l'instrument de la démonstration ; l'intuition est l'instrument de l'invention."[xv]

La valeur du raisonnement par récurrence est due à sa capacité à engendrer indéfiniment des êtres mathématiques. C'est là une des manifestations de la faculté de répétition. Le raisonnement par récurrence crée une infinité d'objets finis et permet de passer du fini à l'infini[xvi]. Il se distingue de la définition par postulats, indirecte, qui s'applique à un système de notions dont les relations sont déterminées par un ensemble d'axiomes ou de postulats.

En somme, les divergences d'interprétations du raisonnement par récurrence, cause d'une polémique entre Russell et Poincaré, sont dues à une différence de tendances mentales, à des raisons psychologiques. Avec Poincaré, nous pensons qu'il y a une intervention du philosophique dans le scientifique ; plus précisément, nous sommes d'avis que l'esprit a une intuition directe de cette puissance de répéter indéfiniment la même opération intellectuelle. Il faut insister toutefois sur le fait que cette intuition ne saisit par le raisonnement dans son intégralité mais seulement dans l'un de ces moments : le passage de l'initialisation à l'hérédité. Cette intuition a un contenu : l'extension d'une propriété d'un entier à tous les entiers naturels. La répétition indéfinie de la même opération peut être saisie par une intuition de l'esprit, au sens cartésien du terme. Ainsi, l'intuitionnisme de Poincaré nous invite à penser que l'esprit a affaire, en mathématiques, à des réalités, qui pour abstraites qu'elles soient, n'en sont pas moins des réalités.

Implicitement, la notion de continu mathématique est en cause ici : nous allons tenter de le situer, à l'intérieur même de ce raisonnement singulier qu'est le raisonnement par récurrence.

3/ C'est la raison pour laquelle, nous pensons que, pour se représenter le raisonnement par récurrence par une intuition, il est nécessaire de se confronter au problème de la composition du continu. Il s'agit de savoir si une image du continu suffit à nous donner une idée du continu et quelle image on peut donner du continu

On retrouve ici de célèbres paradoxes grecs, de Zénon en particulier. Car c'est un problème analogue auquel il se confronte : le continu, mais dans l'expérience et non dans les nombres. Il nous semble utile ici d'examiner si ce détour par le continu physique peut nous aider à mieux déterminer le continu mathématique. Les paradoxes de Zénon, tels qu'Aristote les expose dans sa *Physique*[xvii] poussent Zénon d'Elée[xviii] à défendre l'idée que le mouvement est impossible car il serait constitué d'une succession d'instants. La distance parcourue serait, par ailleurs, infinie :

« Mais Zénon raisonne mal : si en effet, dit-il, toute chose est toujours au repos quand elle est dans un espace égal à elle-même, et que ce qui est lancé est toujours dans le 'maintenant', alors la flèche qui est lancée est immobile. Mais cela est faux. Car le temps n'est pas composé des 'maintenant' indivisibles, pas plus que l'est aucune autre grandeur.

Il y a quatre arguments de Zénon à propos du mouvement qui causent des difficultés à ceux qui veulent les résoudre (...). Le second est celui appelé Achille, le voici : ce qui court le plus lentement ne sera jamais dépassé par le plus rapide ; car il est nécessaire que le poursuivant aille d'abord là d'où le fuyard est parti, de sorte qu'il est nécessaire que le plus lent ait quelque avance. Mais c'est là le même argument que celui de la dichotomie, qui en diffère pourtant par le fait que la grandeur que l'on prend ensuite n'est pas divisée en deux. Que le plus lent ne soit pas rattrapé a découlé du raisonnement, lequel est produit en suivant le même chemin que dans la dichotomie (car dans les deux raisonnements on conclut que l'on n'atteint pas la limite du fait que la grandeur est divisée d'une certaine manière. Mais il ajoute dans cet argument que même ce qui selon la fable est le plus rapide ne pourra réussir dans sa poursuite du plus lent), de sorte qu'il est nécessaire que la solution soit la même pour les deux. Mais estimer que celui qui est en tête n'est pas rattrapé, c'est faux, car tant qu'il est en tête il n'est pas rattrapé, mais il est pourtant rattrapé s'il est admis qu'il parcourt une distance finie. »

Par conséquent, penser le continu comme composé d'éléments discontinus ou indivisibles mène à une aporie, car, non seulement on fait abstraction d'une réalité - celle, physique, du mouvement – mais surtout on commet une erreur de raisonnement - dans les prémisses du raisonnement. On s'intéresse à la raison d'être des choses, à la raison pour laquelle elles sont telles qu'elles sont – à leur nature.

L'originalité de la solution d'Aristote[xix] aux paradoxes de Zénon réside en ce qu'il considère le temps, le changement et ce sur quoi le changement a eu lieu comme continus, indéfiniment divisibles, et en ce qu'il pense que ses divisions ont lieu selon des indivisibles. Il distingue pour cela trois types d'union entre deux choses : la successivité, quand elles n'ont pas de choses du même genre entre elles (des maisons identiques dans une rue) ; la contiguïté, quand deux choses successives sont en plus en contact les unes avec les autres (des livres sur une étagère) ; la continuité, enfin, quand l'extrémité par laquelle elles sont en contact est une et la même[xx]. Une intuition du continu est donc possible : elle est abstraite toutefois, car l'unité ou l'union de l'extrémité de deux choses ne se voit pas mais se conçoit de manière théorique ou abstraite seulement. Empiriquement, si l'on ne se fie qu'à ce que nos sens nous donnent à voir d'une telle chose, on ne voit pas cette réunion de deux choses différentes mais l'on ne voit qu'une seule chose.

Car, s'il est vrai que dès le début du livre III de sa *Physique*[xxi] Aristote considère que la première manifestation de l'infini se trouve dans le continu, dont on peut se demander s'il est divisible à l'infini, il est crucial, de préciser toutefois qu'Aristote considère cette question en physicien d'abord et non en mathématicien. Le physicien recherche la cause des êtres naturels, leur raison d'être (ratio essendi), il cherche à savoir si l'infini existe[xxii]. Et s'il existe - en acte ou en puissance - alors reste à savoir quel il est. L'infini se trouve, si l'on suit les thèses de la *Physique*, dans trois domaines : la grandeur, le nombre et le temps. Aristote s'interroge, alors, sur le fait de savoir s'il y a une grandeur ou un nombre qu'on ne peut dépasser (une limite – *peiras*), ou non.

Concernant la grandeur, Aristote distingue, en effet, un infini par division d'un infini par addition. Le premier désigne l'idée qu'on peut poursuivre indéfiniment la division d'une grandeur A, et qu'on peut ajouter à une grandeur B les parties que l'on a séparées de A. La grandeur B se trouve ainsi augmentée indéfiniment par addition. Toutefois, elle n'augmente pas de telle sorte qu'elle dépasse toute grandeur donnée car la somme de ce qu'on ajoute ne peut pas dépasser A.
Si donc avec l'infini par division on finit par dépasser en petitesse toute grandeur donnée, en revanche l'infini par addition nous pose cette difficulté que pour dépasser toute grandeur donnée, il faudrait que préexiste une grandeur A en acte.[xxiii] Nous avons donc ici deux images ou plutôt deux idées, deux concepts distincts, du continu : celle d'un infini par division, illimitée, et celle d'un infini par addition, limitée. L'infini par division se conçoit par l'idée d'indéfini, de division à l'infini, alors que l'infini par addition se conçoit par l'idée d'un infini limité, notion paradoxale s'il en est. Cette distinction recouvre en un sens la distinction entre l'infiniment petit - l'infiniment divisible - et l'infiniment grand - l'infiniment additionnable mais qui ne peut dépasser une certaine limite : celle de la taille des choses. Les choses ont une nature, une forme (*eidos*[xxiv]) même si on peut les diviser à l'infini, on ne peut additionner à l'infini les parties infiniment divisibles.

L'idée que deux choses sont continues à condition que l'extrémité de l'une et de l'autre soit une et la même n'est pourtant pas une synthèse opérée par l'esprit, mais elle est bien plutôt une fusion de deux choses en une. On ne peut donc se représenter le continu par une intuition de l'esprit seulement mais par une image : celle d'une composition, d'une unification de deux choses distinctes. Ce type de continu est, à notre sens, analogue au passage de l'hérédité à la conclusion dans le raisonnement par récurrence.

Conclusion

Penser le continu comme composé d'indivisibles revient à se faire une image fausse des grandeurs, notamment. Le continu de la physique est sans commune mesure avec le continu mathématique – par exemple, l'intuition géométrique du continu. La saisie d'un continu dans le raisonnement par récurrence ne nous semble pas épuiser le sens de ce raisonnement, parce qu'elle peut rendre compte d'un moment de celui-ci seulement.

La réalité du continu mathématique échappe, par ailleurs, à sa représentation objective. De même la réalité de l'induction complète échappe-t-elle à sa représentation objective et imagée – au moins en partie. L'imaginer comme un mouvement indéfini de l'esprit, qui répète la même opération sans cesse, c'est manquer partiellement le sens de ce raisonnement. S'il nous permet de passer du fini à l'infini c'est qu'entre l'un et l'autre - entre l'initialisation et l'hérédité - un saut est franchi, non pas mécaniquement mais par un acte de l'esprit, qui opère une synthèse mentale et consciente.

L'idée de récurrence est, nous semble-t-il, celle de l'universalité d'une caractéristique d'un énoncé dont la vérité repose sur l'implication entre deux énoncés ordonnés ainsi : dans un système bien ordonné, si la vérité d'une propriété d'un énoncé est prouvée, et que l'on montre le caractère héréditaire de cette propriété, alors on prouve que cette propriété est vraie pour tous les entiers. En s'appuyant sur une définition implicite des entiers, on prouve l'universalité d'une implication au rang $n + 1$.

Tenter d'objectiver cette idée, sans la penser véritablement, revient à l'appliquer techniquement seulement. La synthèse mentale par laquelle nous appréhendons le mouvement est, en ce sens, analogue à celle qui s'impose pour appréhender le passage entre les deux première étapes du raisonnement par récurrence : le continu mathématique n'est pas décomposable en éléments indivisibles – des nombres et des instants respectivement. Autrement dit, ce n'est pas parce qu'il y a deux ou trois étapes dans le raisonnement par récurrence que l'on peut le réduire à une procédure normalisée, à une construction d'éléments hétérogènes. Tout au contraire, chaque moment du raisonnement a une fonction théorique pour établir l'universalité d'une caractéristique d'un énoncé, par l'établissement de la vérité d'une implication entre deux énoncés. On peut donc comprendre le raisonnement par récurrence par une intuition de l'esprit, dans les deux premiers moments du raisonnement par récurrence. La troisième étape consiste à saisir une propriété de la totalité des nombres entiers, une fois l'hérédité de cette propriété établie pour une suite d'entiers ordonnée et à partir d'un certain rang de cette suite.

En résumé, pour déductif qu'il soit, le raisonnement par récurrence n'en suppose pas moins une intuition, entre le moment de l'initialisation et celui de l'hérédité. Pour établir la nécessité de l'implication entre ces deux propositions $P(n)$ et $P(n+1)$, une intuition de l'esprit est nécessaire qui saisit en un instant, dans une suite de nombres ordonnés, la continuité d'une opération répétée indéfiniment à partir d'un certain rang. Cette synthèse de l'esprit peut se réduire à l'intuition spécifique par laquelle on peut passer à l'hérédité d'une propriété d'un entier. Toutefois, le passage de l'hérédité à la conclusion ne peut se concevoir de la même manière, par une intuition semblable. De même que le continu physique aristotélicien nous donne à penser la fusion de deux choses en une, de même peut-on comprendre le passage entre la deuxième et la troisième étape du raisonnement par récurrence – entre l'hérédité et la conclusion : cela revient à intégrer ces deux dernières étapes du raisonnement à un raisonnment spécifique, à une forme, une procédure singulière.

Par conséquent, réduire le raisonnement par récurrence à une infinité de syllogismes de même forme – hypothétique – est discutable, car cela ne rend pas compte du passage de l'hérédité à la conclusion. Dire que pour tout n, P(n) est vraie, une fois l'hérédité démontrée, relève d'une opération ou d'un acte de l'esprit d'une nature différente : ce n'est pas un acte de synthèse mais la saisie d'un concept universel, celui de "tout n", i.e. le concept de nombre. On retrouve ici l'enjeu d'une recherche des fondements des mathématiques qui passe par une remise en cause de la définition et de la construction du concept de nombre. En ce sens, l'inventivité mathématique ne se réduit pas à celle d'une intuition mathématique, ni à la récurrence en mathématiques.

Bibliographie

Aristote, *Physique*, in Oeuvres Complètes. Flammarion. 2014. Traduction de Pierre Pellegrin.

Nathalie Chouchan, Les mathématiques. GF Flammarion. Corpus. 1999.

P. Egré, "Le raisonnement par récurrence, quel fondement?", SMF– Gazette – octobre 2015 – n° 146
En ligne : file:///C:/Users/sylvain/Documents/IREM/IREM%202016-2017/Articles%20&%20Textes/SMF-article-récurrence%20P%20EGRE.pdf

Henri Lombardi. Épistémologie mathématique. Références sciences. Paris: Ellipses, 2011. v+208 p.

Henri Lombardi, Les paradoxes de Zénon, brochure du séminaire Epiphymaths. 1991.
En ligne : http://epiphymaths.univ-fcomte.fr/publications/

Stefan Neuwirth, Les mathématiques de l'Antiquité (cours de Master),
En ligne : http://lmb.univ-fcomte.fr/stefan-neuwirth

Henri Poincaré, La science et l'hypothèse, Flammarion. Champs. 2004

Henri Poincaré, La valeur de la science, Flammarion, Champs, 2003

Henri Poincaré, Science et méthode, 1908

Henri Poincaré, Les mathématiques et la logique, XVII, 1905

Henri Poincaré, Dernières Pensées, Flammarion, 1913

Anne-Françoise Schmid, Henri Poincaré, Les sciences et la philosophie. L'Harmattan, 2001.

i "On peut alors se demander pourquoi, en sus de l'intuition, nous avons ajouté ici un autre mode de connaissance, celui qui se fait par *déduction* ; nous entendons par là tout ce qui se conclut nécessairement de certaines autres choses connues avec certitude. Il a fallu procéder ainsi, parce que la plupart des choses sont l'objet d'une connaissance certaine, tout en n'étant pas par elles-mêmes évidentes ; il suffit qu'elles soient déduites à partir de principes vrais et déjà connus, par un mouvement continu et ininterrompu de la pensée, qui prend de chaque terme une intuition claire : ce n'est pas autrement que nous savons que le dernier anneau de quelque longue chaîne est rattaché au premier, même si nous ne voyons pas d'un seul et même coup d'œil l'ensemble des anneaux intermédiaires dont dépend ce rattachement ; il suffit que nous les ayons examinés l'un après l'autre, et que nous nous souvenions que du premier au dernier, chacun d'eux est attaché à ses voisins immédiats. Nous distinguons donc ici l'intuition intellectuelle et la déduction certaine, en ce que l'on conçoit dans l'une une sorte de mouvement ou de succession, et non pas dans l'autre : et parce qu'en outre, pour la déduction, il n'est pas besoin comme pour l'intuition d'une évidence actuelle, mais que c'est à la mémoire qu'elle emprunte, d'une certaine manière sa certitude. De là suit qu'on peut dire de ces propositions qui se concluent immédiatement à partir des premiers principes, qu'on les connaît, selon le point de vue auquel on se place, tantôt par l'intuition, tantôt par la déduction ; mais que les premiers principes eux-mêmes ne sont connus que par l'intuition, tandis que les conclusions éloignées ne sauraient l'être que par la déduction. Telles sont les deux voies les plus certaines pour parvenir à la science (…). » Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, III, AT X, 368-369.

ii L'induction complète est un raisonnement direct et rigoureux, il s'apparente à une inférence immédiate. Poincaré désigne sous ce nom le raisonnement par récurrence. L'induction complète se distingue de l'induction scientifique - des sciences de la nature - qui remonte du donné expérimental à un principe explicatif. L'induction complète se contente d'étendre la connaissance, sans médiation et par un procédé quasi mécanique, n'introduisant aucune idée nouvelle. Au contraire, l'induction scientifique demande un génie inventif pour trouver l'hypothèse conforme à l'expérience, l'hypothèse vraie en somme.

iii *La science et l'hypothèse*, Chapitre 1, § 4, "Sur la nature du raisonnement mathématique", 1902 – Reprise du texte paru dans la Revue de Métaphysique et de Morale en 1894 – Champs Flammarion, p.38

iv Ce principe de contradiction est défini par Aristote, Métaphysique, Γ3, 1005b18 : "il est impossible que le même appartienne et n'appartienne pas en même temps à la même chose et du même point de vue".

v *La science et l'hypothèse*, Chapitre 1, § 6

vi traduction Jules Tricot, Vrin, 1936

vii traduction Michel Crubelier, in Oeuvres Complètes. Flammarion. 2014

viii *La science et l'hypothèse*, Chapitre 1, § 2, "Sur la nature du raisonnement mathématique", 1902

ix Ibidem.

x dans la Revue *Mind,* en juillet 1905.

xi *Les Mathématiques et la Logique*, Revue de Métaphysique et de Morale, 13, 1905 et 14, 1906. Articles repris dans *Science et Méthode*. Voir également le passage suivant : "Notre conclusion, c'est d'abord que le principe d'induction ne peut pas être regardé comme la définition déguisée du nombre entier[...] Les applications possibles du principe d'induction sont innombrables; prenons par exemple l'une de celles que nous avons exposées plus haut, et où on cherche à établir qu'un ensemble d'axiomes ne peut conduire à une contradiction. Pour cela on considère l'une des séries de syllogismes que l'on peut poursuivre en partant de ces axiomes comme prémisses. Quand on a fini le n[e] syllogisme, on voit qu'on peut eu faire encore un autre et c'est le n + 1[e] ; ainsi le nombre n sert à compter une série d'opérations successives, c'est un nombre qui peut être obtenu par additions successives. C'est donc un nombre depuis lequel on peut remonter à l'unité par soustractions successives. On ne le pourrait évidemment pas si on avait n = n — 1, parce qu'alors par soustraction on retrouverait toujours le même nombre. Ainsi donc la façon dont nous avons été amenés à considérer ce nombre n implique une définition du nombre entier fini et cette définition est la suivante : un nombre entier fini est celui qui peut être obtenu par additions successives, c'est celui qui est tel que n n'est pas égal à n — 1. " *Science et Méthode*, XI.

xii LOGICISME. Au sens général, cette interprétation des mathématiques consiste à penser que les mathématiques sont réductibles à la logique, qu'elles n'en sont qu'une partie. Il s'est développé surtout à la fin du XIX[ème] siècle avec les travaux de Frege, Russell et Whitehead. Le projet de Frege supposait la formalisation du raisonnement mathématique et la construction d'une écriture mathématique entièrement symbolique. Il s'oppose au projet formaliste et envisage la logique non pas comme la non-contradiction d'un système de relations mais comme un ensemble de quelques notions qu'il considère comme des termes universels intelligibles a priori de la pensée rationnelle - ceux-ci étant inséparables de leur sens. L'intuition n'a aucun rôle dans les mathématiques. L'enjeu concerne le fondement des mathématiques, i.e. la construction d'une définition logique suffisamment explicite ou univoque, du nombre entier pour mettre en évidence son contenu de signification purement logique. Ainsi, dans la *Begriffschrift*, en 1879, Frege propose un système formel qu'il applique à la logicisation de l'arithmétique : il tente d'éviter les contradictions ou paradoxes que l'on rencontre dès lors que l'on utilise de manière intuitive les notions logiques fondamentales.

xiii FORMALISME. Au sens moderne du terme, le formalisme est une présentation des théories scientifiques dans le cadre d'un système formel : celui-ci permet de caractériser, sans ambiguïté, les expressions du langage et les règles de démonstration recevables. Le formalisme est aussi à l'origine du développement autonome d'une logique mathématique, celle-ci créant ses propres problèmes et concepts. La formalisation des mathématiques est liée au développement de l'axiomatique (l'étude critique des axiomes, i.e. des principes posés au fondement d'une science déductive). Les questions portent alors sur la « forme », l'organisation interne des théories mathématiques, l'enjeu étant de « réviser » les théories traditionnelles : ainsi Hilbert réforma la géométrie euclidienne (en 1899) et Peano l'arithmétique des entiers naturels. Le point de vue formaliste sur les mathématiques consiste à faire abstraction dans les mathématiques de la référence des termes utilisés et à renoncer au concept classique de la vérité comme « adéquation de l'esprit et de la chose ». Ce fut, notamment avec Leibniz déjà, une tentative de réduire le raisonnement mathématique à des calculs « automatiques » sur des symboles. Les mathématiques n'ont plus affaire à des objets existant réellement, dans la nature, tel l'espace euclidien à trois dimensions. Mais le formalisme désigne également une interprétation de ces changements, concurrente de « l'intuitionnisme » tout autant que du « logicisme » : les mathématiques doivent mettre de côté tout recours à l'intuition et ne considérer que les relations entre les termes qu'on introduit. La mathématisation de la logique que tenta Boole, par exemple, consiste à appliquer l'algèbre symbolique à la logique traditionnelle « la mathématique traite des opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées. » (An Investigation of the Laws of Thought, 1854). L'enjeu philosophique est, notamment, de rejeter la métaphysique, mais aussi de ne laisser la place qu'au constat de la variété des règles possibles : l'on pourrait alors trouver une base solide et universelle aux mathématiques. Rejetant le recours à toute intuition de l'infini, le formalisme de Hilbert recherche des procédés de démonstration prédéfinis portant sur des énoncés finis. L'espoir de Hilbert résidait dans l'universalité de cette base formelle des mathématiques : faire entrer dans le cadre de ce formalisme toutes les mathématiques passées. L'échec de cette entreprise fut manifeste lorsque Gödel démontra l'insuffisance fondamentale des systèmes formels à travers le théorème d'incomplétude : tout système formel comprend des énoncés indécidables, dont la valeur de vérité est impossible à déterminer.

xiv *La science et l'hypothèse*, Chapitre 1, § 6

xv *La valeur de la science*, p.37. Cf. également : "C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente" in *Science et méthode*, p. 137.

xvi *La science et l'hypothèse,* introduction, p. 22

xvii Aristote, *Physique,* VI, 9, 239b 5-30.

xviii Zénon d'Elée, 490-430, disciple de Parménide.

xix Au livre VI de sa *Physique*, Aristote s'intéresse à la divisibilité du mouvement. Le premier chapitre consiste à montrer que le continu ne peut se composer d'indivisible, que la grandeur, le temps et le mouvement ne doivent pas se composer d'indivisibles et que tout continu a nécessairement des parties divisibles à l'infini. Apparaissent alors les paradoxes suivants : la ligne est faite de points sans être pour autant composée de points. Le point est la limite (*peiras*) du segment, l'instant la limite du temps, le kinèma celle du mouvement.

Donc le continu n'est pas composé d'indivisible, sans quoi l'on se heurte à une aporie, celle de la régression à l'infini que reprendrons les atomistes pour défendre l'idée d'atome (*atomos* : insécable, indivisible).

xx *Physique*, V, 3

xxi *Physique*, III, chapitre 1, 200b17. Si l'on s'intéresse au problème de l'infini et plus particulièrement de la composition du continu on peut lire dans la *Physique* d'Aristote, d'une part, le livre III, qui développe une théorie de l'infini ; et, d'autre part, le livre VI qui porte sur la divisibilité du mouvement.

xxii*Physique*, III, 4

xxiii *Physique*, IV, 12, 221b3. Concernant le nombre, l'infini est en puissance dans le nombre, mais cela ne signifie pas seulement qu'on peut toujours obtenir un nombre supérieur à un nombre donné en ajoutant une unité car là encore Aristote raisonne en physicien : dans la nature (phusis) il n'existe pas une infinité d'êtres, le monde (sublunaire) est fini. Il est irréalisable que de faire augmenter indéfiniment le nombre des hommes. Concernant le temps enfin, l'infini en puissance dans le temps se distingue de celui dans le nombre et dans la grandeur au sens où, même s'il y a toujours du temps avant, et du temps après un moment donné, il n'en reste pas moins que le "nombre du temps" (le nombre de jours, d'années) devient plus grand que tout nombre donné. Le temps humain est donc limité. Ces trois infinis valent pour le monde des êtres naturels mais qu'en est-il des êtres éternels? Que penser du temps des êtres ou des choses éternelles? Ce temps n'est pas infini, il n'y a pas d'infini dans le temps en acte, les êtres éternels ne vivent pas dans un temps infini. La marque du temps étant la corruption - le fait de se dégrader - on peut distinguer les êtres qui sont soumis au temps (les êtres naturels) de ceux qui ne le sont pas (les dieux ou les astres, réalités du monde supra-lunaire)

xxiv*Physique*, II, 3, 194b15