Revue d'histoire des sciences

De la nature épargnante aux forces généreuses : le principe de moindre action entre mathématiques et métaphysique. Maupertuis et Euler, 1740-1751/*From nature that economizes to generous forces : the principle of least action between mathematics and metaphysics, Maupertuis and Euler, 1740-1751*

M Marco Panza

Résumé

RÉSUMÉ. — L'article discute les relations et les différences entre les traitements, par Maupertuis et Euler, du principe de moindre action, dans plusieurs mémoires écrits entre 1740 et 1751. En particulier, il insiste sur l'opposition entre, d'une part, la conception métaphysique et théologique de Maupertuis qui pense l'action comme une quantité réelle agissant dans la nature, que Dieu rend minimale dans le mouvement et dans tout autre phénomène physique, et, d'autre part, l'interprétation, par Euler, de l'action comme une entité mathématique exprimée par une forme intégrale et caractéristique de tout système mécanique.

Abstract

SUMMARY. — In this paper I discuss relations and differences between the ways in which Maupertuis and Euler treated the principle of least action in a number of articles written between 1740 and 1751. Namely, I stress the opposition between the metaphysical and theological conceptions of Maupertuis, who thought that action is a real quantity acting in nature which God minimizes in motion and in any other physical phenomena, and the conception of Euler, who interpreted action as a mathematical entity, expressed in the form of an integral, that characterizes mechanical system.

doi : 10.3406/rhs.1995.1240

http://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1995_num_48_4_1240

De la nature épargnante aux forces généreuses : le principe de moindre action entre mathématiques et métaphysique. Maupertuis et Euler, 1740-1751 (*)

Marco Panza (**)

Sommaire

(*) Le présent article est une version améliorée d'un texte préparé à l'occasion d'un exposé au Colloque « Geschichte der Mathematik » qui s'est tenu à Oberwolfach du 20 au 26 novembre 1988. Je tiens à remercier Jean Dhombres, pour ses nombreux conseils et pour sa critique d'une première version de mon texte, ainsi que Amy Dahan-Dalmedico et Giorgio Israel, pour plusieurs discussions très éclairantes pour moi, Sylvie Germain qui a patiemment corrigé ma prose et Véronique Bourienne dont le travail d'*editing* a permis d'éliminer de nombreuses imprécisions de mon texte et a grandement amélioré celui-ci.

(**) Marco Panza, Université de Nantes, Faculté des sciences, Centre François Viète, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03.

RÉSUMÉ. — L'article discute les relations et les différences entre les traitements, par Maupertuis et Euler, du principe de moindre action, dans plusieurs mémoires écrits entre 1740 et 1751. En particulier, il insiste sur l'opposition entre, d'une part, la conception métaphysique et théologique de Maupertuis qui pense l'action comme une quantité réelle agissant dans la nature, que Dieu rend minimale dans le mouvement et dans tout autre phénomène physique, et, d'autre part, l'interprétation, par Euler, de l'action comme une entité mathématique exprimée par une forme intégrale et caractéristique de tout système mécanique.

MOTS-CLÉS. — Euler; Maupertuis; mécanique analytique; XVIIIe siècle; moindre action.

SUMMARY. — In this paper I discuss relations and differences between the ways in which Maupertuis and Euler treated the principle of least action in a number of articles written between 1740 and 1751. Namely, I stress the opposition between the metaphysical and theological conceptions of Maupertuis, who thought that action is a real quantity acting in nature which God minimizes in motion and in any other physical phenomena, and the conception of Euler, who interpreted action as a mathematical entity, expressed in the form of an integral, that characterizes any mechanical system.

KEYWORDS. — Euler; Maupertuis; analytic mechanics; 18th century; least action.

PRÉAMBULE

Rarement le problème philosophique visant à saisir les formes de la connaissance idéale — ou, au moins, d'une organisation idéale de la connaissance — ne s'est posé, dans l'histoire de la pensée d'une manière plus contraignante qu'au Siècle des lumières; et rarement la réponse donnée à cette question par une communauté intellectuelle n'a été aussi influente sur la formation des intérêts des scientifiques et sur la sélection des objets de leurs recherches qu'au cours de ce même siècle. Si l'image d'une connaissance unitaire, constituée par une seule chaîne ininterrompue de connaissances particulières liées entre elles au moyen d'un rapport de déduction, ne fut jamais associée qu'à la perfection divine, elle se transposa sur la Terre non seulement dans la reprise du projet baconien, visant à la détermination d'*un* tableau universel dans lequel le savoir des hommes pût se présenter sous la forme d'un arbre enraciné dans l'expérience, mais aussi dans *plusieurs* programmes particuliers s'adressant aux différentes branches de la connaissance et unifiés entre eux seulement par une similitude de la forme extérieure qu'ils s'accordaient à imposer à celles-ci. La possibilité de parvenir à saisir les anneaux de liaison entre sciences séparées étant renvoyée à l'avenir, le problème consistant à organiser ces sciences dans une forme déductive, à partir du nombre le plus petit possible de principes (ou éléments), apparaît au contraire comme tout à fait abordable. Et ce fut à ce problème que les principaux savants du siècle consacrèrent une grande partie de leur énergie.

La question qui est à l'origine de mon étude porte sur la comparaison entre deux tentatives différentes d'organisation de la mécanique, séparées par trois ans seulement : la première fait l'objet du mémoire de 1760-1761 du jeune Joseph-Louis Lagrange sur les applications à la dynamique de la nouvelle « méthode pour déterminer les *maxima* et les *minima* » et la seconde occupe la première partie du mémoire de 1764 du même auteur sur la libration de la lune (1). Dans le premier de ces essais, Lagrange avait choisi le principe eulérien de moindre action comme principe générateur de la mécanique; dans le second, il avait au contraire préféré à ce dernier le principe des vitesses virtuelles qu'il maintiendra d'ailleurs comme base de cette science tant dans la *Mécanique analytique* que dans la *Théorie des fonctions analytiques* (2).

Le problème auquel je me suis attaché est celui de la compréhension de certaines, au moins, des raisons qui ont motivé ce soudain changement de perspective. C. Fraser en a proposé trois, sous la forme d'une « explication plausible » du choix de Lagrange (3) : le dédain lagrangien pour toute spéculation métaphysique ou théologique; la restriction du premier principe au seul cas où le système est tel que la somme des moments des forces forme une fonction intégrable; l'applicabilité immédiate (et, je dirais, tout à fait « naturelle ») au deuxième principe des nouvelles techniques variationnelles fondées sur l'introduction des δ-différentielles.

Dans un autre travail (4), j'ai cherché à présenter quelques remarques sur la troisième raison. J'essaierai ici, au contraire, d'expliquer le choix de Lagrange en l'entendant comme issu d'un mouvement de pensée et d'un débat épistémologique qui ont accom-

(1) Cf. respectivement Lagrange (1761b) et (1764). On trouvera les références complètes des travaux cités en notes dans la bibliographie placée en fin d'article.

(2) Cf. respectivement Lagrange (1788) et (1797). Je me permets de renvoyer à ce propos à Panza (1990).

(3) Cf. Fraser (1983), 233-235.

(4) Cf. Panza (1991-1992).

pagné la naissance et les premiers essors de la mécanique analytique à partir de 1740. La reconstruction de ce débat, afin de mettre au clair le « statut épistémologique » — entre métaphysique et mathématiques — du principe de moindre action, fera l'objet de mon travail (5).

I. — Une distinction de Maupertuis : principes du premier type, principes du second type

« Si les Sciences sont fondées sur certains principes simples et clairs dès le premier aspect, d'où dépendent toutes les vérités qui en sont l'objet, elles ont encore d'autres principes, moins simples à la vérité, et souvent difficiles à découvrir; mais qui étant une fois découverts, sont d'une très-grande utilité. Ceux-ci sont en quelque façon les Loix que la Nature suit dans certaines combinaisons de circonstances, et nous apprennent ce qu'elle fera dans de semblables occasions. Les premiers principes n'ont guère besoin de Démonstration, par l'évidence dont ils sont dès que l'esprit les examine; les derniers ne sçauroient avoir de Démonstration physique *à la rigueur*, parce qu'il est impossible de parcourir généralement tous les cas où ils ont lieu. »

C'est ainsi que Pierre-Louis Moreau de Maupertuis commence son mémoire de 1740, dont le but est de proposer un nouveau principe du second type qui exprime les conditions d'équilibre d'un système quelconque de corps matériels, sur lesquels agissent des forces données, et qu'il qualifie de *loi de repos* (6). Bien que le texte de Maupertuis soit très loin de l'éclaircir d'une manière irréprochable et générale, la distinction qu'il énonce semble aisément caractérisable — au moins en termes extensionnels — lorsqu'on prête attention au développement de la mécanique depuis Newton. Une fois rangés dans une première catégorie les principes qui permettaient la résolution d'un problème de mécanique au moyen d'une analyse directe des masses des corps, de leur position et des forces agissant sur eux — c'est-à-dire, en particulier, les trois principes dits de Newton, accompagnés par les considérations géométriques

(5) Pour une reconstruction plus proche des sources de ce même débat, cf. Pulte (1989).

(6) Cf. Maupertuis (1740). La citation est tirée de la p. 170.

élémentaires qui intervenaient dans la mise en équation de ces données et par les définitions correspondantes —, il restait encore, pour compléter la liste des principes effectivement utilisés par les mécaniciens, d'autres principes comme ceux de la descente maximale du centre de gravité ou de la conservation des forces vives (7), auxquels Maupertuis proposait d'ajouter sa « loi du repos ».

Alors même que la suite de mon article devrait aider à montrer l'intérêt historique de cette distinction — le rôle qu'elle a joué *de facto* dans le développement de la mécanique (8) —, il ne me semble pas déplacé de consacrer le présent paragraphe à une discussion qui vise à préciser son contenu intentionnel, et à s'interroger sur sa légitimité *de jure*.

Je vais commencer par exposer l'opinion de Maupertuis à propos de la source d'où proviendrait notre certitude concernant les principes du second type. Elle est double, inductive d'un côté, métaphysique de l'autre :

> « Jamais on n'a donné de Démonstration générale *à la rigueur,* de ces principes; mais jamais personne, accoûtumé à juger dans les Sciences, et qui connaîtra la force de l'induction, ne doutera de leur vérité. Quand on aura vû que dans mille occasions la Nature agit d'une certaine manière, il n'y a point d'homme de bon sens qui croye que dans la mille-unième elle suivra d'autres loix.
>
> « Quant aux Démonstrations *a priori* de ces sortes de principes, il ne paroît pas que la Physique les puisse donner; elles semblent appartenir à quelque science supérieure (9). »

Mais si induction et spéculation métaphysique ne pouvaient certainement pas être considérées comme tout à fait étrangères au

(7) Les exemples sont tirés du même texte de Maupertuis (*ibid.*). En réalité, Maupertuis ne présente qu'une version restreinte du principe de conservation des forces vives, la seule qui à l'époque pouvait être considérée comme plus ou moins sûre : « Dans tout systeme de corps en mouvement, qui agissent les uns sur les autres, la somme des produits de chaque Masse par le quarré de sa vîtesse, ce qu'on appelle la Force vive, demeure inaltérablement la même. » (*Ibid.,* 171.) La première énonciation d'un principe analogue est habituellement attribuée à Huygens — cf. Huygens (1673), partie IV, prop. IV, 98; à ce propos, cf. Jouguet (1908-1909), partie I, 159-161 et 169-175 —, même si, en tant que tel, le principe ne peut être assigné qu'à Jean Bernoulli — cf. J. Bernoulli (1727) — et ne sera généralisé que par Daniel Bernoulli — cf. D. Bernoulli (1738).

(8) Je crois qu'une étude de type différent pourrait d'ailleurs montrer le rôle essentiel joué par les principes du second type (en tant qu'opposés aux principes newtoniens) dans le développement d'une mécanique des systèmes matériels à plusieurs corps. Je reviendrai sur cette question à la fin de la présente partie.

(9) Cf. Maupertuis (1740), 170.

domaine de la « science », en tant que modalités de justification, un savant du XVIII[e] ne pouvait pas ne pas remarquer la différence essentielle qui les séparait de la justification mathématique à partir d'une évidence originaire, comme celle que Maupertuis semble assigner aux principes newtoniens et refuser, au contraire, aux principes du second type. Grâce à quelle légitimité et en vue de quel avantage ces derniers principes viennent-ils donc s'incorporer à une science qui prétend au statut de mathématique et en deviennent-ils des éléments (10)? Voici la réponse de Maupertuis :

> « Notre esprit étant aussi peu étendu qu'il l'est, il y a souvent trop loin pour lui des premiers principes au point où il veut arriver, et il se lasse ou s'écarte de sa route. Ces loix dont nous parlons, le dispensent d'une partie du chemin : il part de-là avec toutes ses forces, et souvent n'a plus que quelques pas à faire pour arriver là où il désire (11). »

Opposés intrinsèquement, d'après Maupertuis, par la nature de leur base justificative, les principes du premier et du second type s'opposent ainsi extrinsèquement par le rôle qu'ils assument dans l'édifice de la mécanique, les premiers constituant la base véritable d'une science idéale qui s'organiserait sur eux comme une chaîne ininterrompue, les seconds n'étant que les premiers maillons de certaines parties de cette chaîne qu'on a pu reconstruire (12). Si Maupertuis souligne la difficulté du chemin qui conduirait les hommes des principes du premier type à ceux du second, il ne semble pas considérer la connaissance de la chaîne complète de la mécanique comme en principe exclue des possibilités humaines. Tout au contraire, il semble qualifier les justifications métaphysiques et inductives des principes du second type de simples raccourcis d'un chemin qui pourrait un jour être complètement parcouru. De nouvelles justifications de ces principes viendraient alors s'ajouter à celles déjà connues; ils prendraient la forme de déductions à partir des principes newtoniens. Au moyen de ces

(10) J'utilise ici le terme « éléments d'une science » dans le sens de d'Alembert, qui se réfère aux « propositions ou vérités générales qui servent de base aux autres, et dans lesquelles celles-ci sont implicitement renfermées », de sorte que « ces élémens seront comme un germe qu'il suffiroit de développer pour connoître les objets de la science fort en détail » (d'Alembert (El. Sci.), 491b).

(11) Cf. Maupertuis (1740), 171.

(12) Celle-ci est bien, d'ailleurs, l'idée qui, quelques années plus tard (au cours de la fameuse dispute sur le principe de moindre action), sera défendue par d'Alembert dans l'*Encyclopédie* (cf. d'Alembert (Cosm.), 294a).

justifications, ainsi que des justifications métaphysiques, on aboutit à des preuves *a priori*. En soulignant le caractère mathématique de la déduction qui semble ici s'imposer, j'appellerai les premières « *preuves mathématiques* a priori » et les deuxièmes « *preuves métaphysiques* » (13). Quant aux justifications inductives, on imagine fort difficilement — sauf pour des cas très particuliers — comment elles pouvaient se présenter sous la forme d'une confirmation expérimentale répétée d'un ensemble de prévisions factuelles (14). Tout ce qu'on pouvait espérer était de vérifier la concordance des solutions qui, pour de nombreux problèmes assez simples, découlaient tant des principes newtoniens, que des principes du second type. De cette manière, on ne produit qu'une justification *a posteriori*, qui peut être considérée comme conclusive seulement si l'on admet une sorte de postulat de continuité de la vérité : ce qui est vrai pour les cas les plus simples reste vrai pour les cas les plus complexes. J'appellerai ces justifications « *preuves mathématiques* a posteriori ».

Dans les années qui ont suivi la publication du mémoire de Maupertuis, ces trois voies ont toutes été parcourues. S'il est bien clair que la production d'un argument mathématique *a priori* complet clôt la question épistémologique de la justification (15) — un principe du second type ne survivant après elle que sous la forme d'un résumé plus ou moins « économique » et convenable de certaines conséquences des principes du premier type —, on peut

(13) Je n'imagine pas la possibilité d'une preuve métaphysique *a posteriori* (au sens strict du mot « preuve »). D'ailleurs, le statut d'une preuve métaphysique (*a priori*) est, lui-même, très vague. Je me réfère ici — comme d'ailleurs le fait Maupertuis —, plutôt qu'à une idée générale, à un ensemble historiquement déterminé d'argumentations effectivement produites. La détermination de d'Alembert qui lie ce genre de preuves à des raisonnements qui n'entrent pas « dans les détails trop circonstanciés des faits » (*ibid.*) n'est en effet qu'une chicane rhétorique dépourvue d'une signification claire.

(14) Bien que la prose de Maupertuis semble se référer d'une manière rhétorique à des justifications de ce type, une telle voie ne fut jamais empruntée, que je sache, d'une manière sérieuse. L'appel générique à l'autorité d'un appui expérimental (jamais caractérisée d'une manière explicite) est une figure rhétorique très fréquente dans la prose scientifique de l'époque, à laquelle il ne serait pas inutile de consacrer des études historiques. Celles-ci pourraient contribuer, je crois, à mettre fin au mythe — accrédité d'ailleurs par les savants et les philosophes des lumières — du XVIII[e] siècle en tant que grand siècle de la physique expérimentale.

(15) Cela ne signifie pas que la présentation d'une telle preuve clôt toute question épistémologique relative au principe dont il s'agit. Pour ne citer que deux exemples, les questions de sa capacité explicative ou de sa force descriptive deviennent au contraire encore plus pressantes.

bien imaginer des preuves mathématiques *a priori* incomplètes, la dérivation n'étant possible que sous certaines conditions particulières qui se rapportent à des groupes spécifiques de phénomènes. Les déductions établies ne constituent alors qu'une base possible pour une nouvelle induction et la question reste ainsi tout à fait ouverte, comme elle l'est restée d'ailleurs pour le principe de moindre action, après l'incomplète preuve mathématique *a priori* fournie par Euler en 1744 (16). On pourra lire mon travail comme un essai de reconstruction d'une partie des réponses que les savants ont données à une telle question dans les dix années qui ont suivi la formulation par Maupertuis de la loi du repos (dont le principe de moindre action peut être considéré comme une généralisation). Il y a ici, je crois, un passage essentiel dans l'édification d'une mécanique analytique, dont l'étude peut éclairer de nombreux passages successifs.

Avant de passer aux textes, il est toutefois bon d'ajouter quelques remarques préliminaires supplémentaires qui visent à compléter la réflexion sur le contenu intentionnel de la distinction de Maupertuis. Jusqu'ici je me suis limité à souligner l'opposition qui, d'après ce dernier, subsisterait d'un côté entre les sources d'évidence des principes du premier et du second type et de l'autre entre les fonctions qu'ils acquerraient dans le système d'une mécanique idéale. Cette opposition semble en effet la seule qui soit présente d'une manière explicite dans les passages cités. Ces mêmes passages — et en particulier le premier — semblent toutefois évoquer, bien que d'une manière implicite, une autre opposition qui participerait à la distinction entre les deux types de principes. Ceux du second type, nous dit Maupertuis, « sont en quelque façon les Loix que la Nature suit dans certaines combinaisons de circonstances, et nous apprennent ce qu'elle fera dans de semblables occasions (17) ». Si l'on ne veut pas considérer une telle déclaration seulement comme rhétorique et si l'on veut lui attacher un sens à l'intérieur de l'énonciation de la distinction entre deux sortes de principes, on doit en conclure que cette qualification de « loi que la Nature suit dans certaines combinaisons de circonstances » ne convient pas, d'après Maupertuis, aux principes newtoniens. Ces derniers pourraient alors s'opposer aux principes du second type, comme la fixation des rela-

(16) Cf. la partie IV ci-après.
(17) Cf. n. 6 *supra*.

tions formelles entre les catégories générales, qui établissent un cadre conceptuel permettant la description objective d'une certaine classe de phénomènes, s'oppose à la détermination des lois qui règlent le déroulement de ces phénomènes en prescrivant les comportements effectifs de la nature. Aux principes newtoniens, il reviendrait alors d'établir (par l'édification d'une véritable « ontologie régionale ») la classe des *possibilia* et aux principes du second type de caractériser d'une manière univoque la réalité phénoménale (18).

Or, si l'on accepte une telle interprétation, on doit aussi en conclure que la foi de Maupertuis dans la *déductibilité* des principes du second type à partir des principes newtoniens exprime une position radicalement déterministe : la classe des *possibilia* fixés par la mise en place des notions générales de la physique newtonienne ne contient que les comportements réels de la nature. Il ne s'agit pas ici simplement d'une formulation implicite de ce qu'on appelle habituellement le « principe du déterminisme de Newton » — « l'état initial d'un système mécanique [l'ensemble des positions et des vitesses des points du système à une date quelconque] définit de façon unique le futur de son mouvement (19) ». Il s'agit plutôt de reconnaître implicitement que les mêmes principes qui gèrent la description en termes newtoniens de l'état initial d'un système déterminent d'une manière univoque les lois de son mouvement : non seulement ce dernier est déterminé par l'état initial du système, mais cette détermination ne dépend de plus que des principes employés pour caractériser cet état. Une telle conclusion apparaît dans toute sa difficulté si on la relie à l'idée de Maupertuis d'une évidence immédiate (et, pour ainsi dire, originaire), des principes du premier type. En effet, il ne reste à ce moment-là que deux possibilités : ou l'on est disposé à interpréter l'évidence des principes newtoniens (ou au moins de l'un d'entre eux) en quelque sorte comme une évidence de nature empirique et non simplement conceptuelle, ou l'on doit reconnaître le caractère strictement nécessaire de la conclusion précédente : il y a un seul comportement de la nature qui soit compatible avec

(18) Mon langage ne doit pas tromper les lecteurs. Je n'ai aucune intention de suggérer subrepticement l'idée d'un Maupertuis précurseur d'une philosophie de la science de nature transcendantale. Il s'agit simplement d'énoncer de la manière théoriquement la plus conséquente l'opposition entre *principes du possible* et *lois de la réalité*, qui est à mon sens implicite dans le passage cité.

(19) Cf. par exemple Arnold (1976), 13.

nos évidences conceptuelles originaires, le *logique* détermine bel et bien le *réel*.

La première conception semble être généralement acceptée par la plus grande partie des mécaniciens continentaux, au moins jusqu'aux années 1730. Parmi les principes (ou axiomes) de la mécanique, ils faisaient la distinction entre principes nécessaires ou abstraits (de nature strictement mathématique) et principes contingents fondés sur l'expérience sensible (20). Dans le second groupe, une indiscutable primauté était assignée au principe de proportionnalité des forces aux accélérations, connu aussi sous le nom de « principe de Galilée » ou deuxième principe de Newton. De la contingence d'un tel principe découlait ainsi la contingence de la mécanique dans sa complexité de science générale du mouvement des corps. Une telle contingence ne s'étendait pas toutefois à toute la mécanique, une partie considérable de celle-ci étant directement déductible des principes nécessaires. Le programme consistant à élargir le plus possible le champ des conséquences déductives de ces principes (en montrant ainsi le caractère nécessaire — ou bien mathématique — d'une partie toujours plus grande de la mécanique) (21) ne devait pas ainsi apparaître comme contradictoire par rapport à la foi dans la contingence du monde, dans la liberté de l'acte créateur en tant que choix d'une seule possibilité parmi d'autres. Cette foi ne faisait que limiter l'espérance du succès du programme de réduction de la mécanique à la nécessité des mathématiques : une part de contingence devait certainement rester dans les lois du mouvement après qu'on eut dégagé toutes les conséquences des principes nécessaires.

Je ne reviendrai pas ici sur la légitimité d'un tel point de vue — qui d'ailleurs ne put jamais s'appuyer pendant les XVII^e^ et XVIII^e^ siècles sur la détermination précise d'une suite d'expériences propres à justifier la proportionnalité des forces aux accélérations (22). Je me limiterai à remarquer à quel point il ne peut

(20) Cf. Dhombres (1986), 4-5. Maupertuis lui-même finira en 1756 par accepter une telle conception (cf. n. 26 *infra*).

(21) Un exemple très significatif de cette démarche est constitué par la démonstration « en nécessité » du principe de la composition des forces donnée par Daniel Bernoulli en 1726 — cf. D. Bernoulli (1726). Je renvoie, pour un commentaire éclairant sur toute la question, à Dhombres (1986).

(22) La difficulté essentielle est évidemment relative ici à la caractérisation de la force en tant qu'entité empirique individuellement mesurable (cf. n. 51 *infra*).

que s'accorder très mal avec la concession d'une évidence immédiate aux principes newtoniens. Car, étant donné le caractère universel de ces principes, il semble difficile d'imaginer comment une telle évidence peut avoir une origine expérimentale. Il semble ainsi plus raisonnable de lier la déclaration de Maupertuis à une interprétation différente du deuxième principe de Newton, qui, en insistant sur l'impossibilité de caractériser une force autrement que comme cause du changement de la vitesse (dont ce changement est la seule manifestation phénoménale), considère ce principe (ainsi que le principe d'inertie et celui d'action et réaction) comme une véritable définition mathématique (23). Ce sera d'ailleurs justement l'acceptation d'un tel point de vue qui permettra de clore la querelle sur les forces vives, en constituant à différents égards l'acte de naissance d'une mécanique analytique (24) : la mécanique devient non seulement une science mathématisée, mais aussi, au moins en principe, une branche des mathématiques, ses composants expérimentaux n'étant qu'auxiliaires (25). Voilà une nouvelle formulation — cette fois strictement méthodologique — du déterminisme radical de Maupertuis, qu'on n'avait jusqu'ici caractérisé qu'en termes ontologiques.

Si, présentée sous une telle forme, cette option philosophique semble perdre une grande partie de son aspect paradoxal, cela relève du fait que, d'un point de vue méthodologique, on peut s'abstenir de toute référence aux lois de la mécanique comme expression d'une réalité originaire et, en tant que telle, indépendante de toute théorie scientifique. Le nœud autour duquel s'organise une philosophie capable de dissoudre ce paradoxe, sans tomber dans la naïveté d'un empirisme strictement inductiviste et expérimentaliste, est justement celui des rapports entre les prédictions de la mécanique et les comportements effectifs des corps réels. C'est seulement si l'on abandonne l'idée que les premières sont des descriptions des seconds que l'on peut espérer résoudre la difficulté. Maupertuis, ainsi

(23) Cf. n. 52 *infra*.

(24) Assez intéressants, à ce sujet, sont une lettre d'Euler à Maupertuis datée du 26 juillet 1747 — cf. Brunet (1938), 65-68, en particulier 67-68, et Euler (Œuvr.), ser. IV-A, vol. VI, 77-81, en particulier 79 — et, surtout, le mémoire que je note « Euler (1750) » (cf. en particulier les paragraphes 20-23).

(25) Ainsi, dans une semblable mécanique, toute argumentation expérimentale est bannie pour des raisons de principe.

qu'Euler lui-même, semble toutefois loin d'accomplir ce passage; pour lui, les théorèmes de la mécanique expriment sans médiation les mouvements des corps réels (26). Plutôt que d'aborder la tâche difficile de montrer comment le caractère de science mathématique de la nouvelle mécanique ne s'oppose pas à la contingence du monde, il semble alors préférable, dans une recherche historique préliminaire, d'accepter la présupposition de Maupertuis, et de voir quelles difficultés elle pose au sein même de sa philosophie.

La plus évidente de ces difficultés semble être de nature théologique : le déterminisme radical de Maupertuis apparaissant en contradiction avec l'idée de la création du monde comme acte de libre choix d'une possibilité parmi d'autres. La tentative de ce dernier de faire de son principe de moindre action la base d'une nouvelle preuve de l'existence de l'Etre suprême, seule explication raisonnable d'une disposition de la nature à épargner les efforts inutiles, semble ainsi se vider de sens. Car, si l'idée d'un Dieu créateur (ou bien d'une puissance *libre* et originaire) n'est pas, en tant que telle, incompatible avec le programme d'une complète réduction de la mécanique aux mathématiques, ce n'est qu'à condition de penser Dieu comme le créateur de la nécessité et de voir sa suprême puissance dans l'acte de détermination de la logique elle-même : une attitude qui semble en contradiction avec de nombreuses considérations théologiques que Maupertuis mêle constamment à ses réflexions scientifiques, ou avec l'interprétation, assez répandue à l'époque, de la présupposition du même principe comme étant une prise de position théologique (27).

La dernière remarque dont je voudrais faire précéder l'analyse des textes porte sur le rôle joué par les principes du second type dans l'édification de la nouvelle mécanique. Jusqu'ici, en suivant

(26) Dans un mémoire de 1756 — auquel je vais revenir dans l'annexe, cf. Maupertuis (1756) —, Maupertuis introduit plutôt la distinction entre la nécessité des lois tirées de la prise en considération des seules propriétés géométriques des corps — ou bien, comme il dira, de leurs propriétés « replicables », réductibles « à l'étendue ou aux nombres » (cf. *ibid.*, 399) — et la contingence des lois portant sur les propriétés proprement mécaniques de celles-ci. Bien qu'il n'ait pas manqué quelqu'un pour voir dans cette distinction une préconisation des conceptions kantiennes (cf. Bartholmèss (1850-1851), t. I, 247-248), il est clair qu'on reste ici tout à fait en deçà du problème qu'on vient de poser (et qui sera le problème principal auquel la réflexion de Kant cherchera à donner une réponse) : le caractère mathématique (nécessaire) des propositions — pas simplement géométriques — de la mécanique peut-il se concilier avec la contingence du monde?

(27) Cf. l'annexe en fin d'article.

Maupertuis, on a seulement souligné de manière générale l'avantage qui résulte de la formulation de ceux-ci dans la solution des différents problèmes de mécanique. Cette formulation a été envisagée comme raccourci d'un parcours déductif idéal, qui — bien qu'encore caché aux yeux des mécaniciens — pourrait mener des principes newtoniens jusqu'à la solution de tous les problèmes de mécanique. Deux questions se présentent alors à l'esprit tant de l'historien que du philosophe. En premier lieu, il s'agit de comprendre si les difficultés qui s'opposaient à la détermination d'un tel parcours déductif dans les différents cas particuliers peuvent ou non être ramenées à une source commune. En second lieu, il s'agit de savoir si un tel parcours aurait dû ou non passer par la démonstration déductive des principes du second type c'est-à-dire si, une fois améliorée la capacité déductive des hommes, ces derniers principes soit auraient pu être soustraits de la mécanique, soit auraient dû de toute façon y rester mais sous la forme de théorèmes aussi généraux qu'essentiels. Les deux questions semblent trouver une réponse commune dans la prise en compte des difficultés qui s'opposent à l'application des procédures newtoniennes relatives à la solution des problèmes où un seul corps est concerné, à la solution des problèmes concernant plusieurs corps. C'est justement le passage d'une mécanique des corps isolés à une mécanique des systèmes qui a nécessité *de facto* l'introduction des principes du second type et qui, *de jure,* aurait été et serait encore bien difficile sans leur aide. Toutefois la possibilité qu'ils offraient de parvenir à une solution des différents problèmes relatifs à des systèmes de plusieurs corps n'est pas la seule raison qui a justifié le grand intérêt des mathématiques du XVIIIe siècle pour des principes — comme ceux de la conservation des forces vives, de moindre action, ou des vitesses virtuelles — qui étaient restés tout à fait étrangers à l'édifice de la mécanique newtonienne. Ce qui a été d'une grande importance aussi, c'est la possibilité de les traduire d'une manière immédiate dans le langage analytique des équations de forme différentielle, assez simplement maniables. C'est ainsi l'édification même d'une mécanique analytique qui aurait été bien difficile sans l'introduction de ces principes.

II. — La « loi du repos »

Les exemples de principes du second type donnés par Maupertuis au début de son mémoire de 1740 sont le principe de la descente maximale du centre de gravité et celui de la conservation des forces vives (28). A ceux-ci, il propose d'ajouter un principe nouveau, qui vise les conditions d'équilibre d'un système quelconque à plusieurs corps :

Loi du repos. « Soit un systeme de corps qui pèsent, ou qui sont tirés vers des centres par des Forces qui agissent chacune sur chacun, comme une puissance n de leurs distances aux centres; pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la somme des produits de chaque Masse, par l'intensité de sa force, et par la puissance $n + 1$ de sa distance au centre de sa force (qu'on peut appeler la *somme des Forces du repos*) fasse un *Maximum* ou un *Minimum* (29). »

Si on considère un système $\dot{\mathrm{S}}$ de m corps et que les M_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) soient les masses de ces corps, P_ν, Q_ν, ..., W_ν les intensités des forces agissant sur le corps de masse M_ν ($1 \leq \nu \leq m$) et p_ν, q_ν, ..., w_ν les distances du même corps aux centres de ces forces — de sorte que pour tout ν on ait, selon l'hypothèse de Maupertuis, $\mathrm{P}_\nu = P_\nu p_\nu^n$, $\mathrm{Q}_\nu = Q_\nu q_\nu^n$, ..., $\mathrm{W}_\nu = W_\nu w_\nu^n$ (P_ν, Q_ν, ..., W_ν étant les forces absolues agissant sur le corps de masse M_ν) — le nouveau principe peut être réduit à l'équation :

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}_i\left[P_i p_i^{n+1} + Q_i q_i^{n+1} + \ldots + W_i w_i^{n+1}\right]\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}_i(n+1)\left[P_i p_i^n \mathrm{d}p_i + Q_i q_i^n \mathrm{d}q_i + \ldots + W_i w_i^n \mathrm{d}w_i\right] = 0$$

ou bien :

$$\text{(B)} \qquad \sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}_i[\mathrm{P}_i \mathrm{d}p_i + \mathrm{Q}_i \mathrm{d}q_i + \ldots + \mathrm{W}_i \mathrm{d}w_i] = 0,$$

qui exprime, ainsi, la condition d'équilibre.

L'énoncé du principe est assez curieux par rapport à la justification que Maupertuis en fournit. Il imagine que le système est constitué par un nombre quelconque de corps liés à un centre fixe par des rayons immatériels et inflexibles, de sorte que ces corps ne peuvent se mouvoir, quelles que soient les forces agissant sur eux, que sur des circonférences concentriques, poussés par les composants de ces forces tangentiels à ces circonférences. Sans autre

(28) Cf. n. 7 *supra.*
(29) Cf. Maupertuis (1740), 171.

justification, il suppose ensuite qu'un tel système ne soit en équilibre qu'à condition que la somme totale de ces composants soit nulle. Une simple application de la décomposition des forces, suivie par une astucieuse substitution (justifiée par de simples considérations géométriques de nature infinitésimaliste), lui permet alors de déduire la relation (B) — dans laquelle il écrit les forces P_i, Q_i, ..., W_i sous la forme $P_i p_i^n$, $Q_i q_i^n$, ..., $W_i w_i^n$ (30). C'est seulement à ce stade que, au moyen d'une intégration aisée, Maupertuis tire la condition énoncée dans son principe, qui est donc envisagée ici comme une conséquence triviale de (B) (31). Une telle justification étant donnée par rapport à une configuration particulière du système, il s'agit de la généraliser au cas d'un système quelconque. Maupertuis se limite pourtant à montrer comment un tel raisonnement peut être adapté au cas où les rayons rigides sont remplacés par des cordes non élastiques (32).

Bien qu'une telle démarche entraîne une évidente incomplétude de la justification (qui n'est référée qu'à des systèmes particuliers), ce n'est pas là sa caractéristique la plus notable. Ce qui est plus intéressant à souligner, c'est : 1° qu'une telle justification présuppose à son tour l'acceptation d'un principe d'équilibre sous la forme de la condition d'évanouissement de la somme des forces

(30) Maupertuis se limite, à la vérité, au cas où agit une seule force sur chaque corps. La composition des forces étant donnée, les deux cas sont, toutefois, équivalents.

(31) L'exclusion arbitraire des points à différentielle nulle autres que les maxima ou les minima a ici une évidente source métaphysique. Il est d'ailleurs bien clair que, d'un point de vue strictement mathématique, ceci n'entraîne aucune difficulté, un maximum ou un minimum n'étant exprimé analytiquement que par la condition d'annulation de la différentielle. Je reviendrai sur la question ci-dessous.

(32) Pour confirmer son principe, Maupertuis en déduit dans un *scolio* le principe de descente maximale du centre de gravité. Si le système est tel que sur chaque corps n'agit qu'une force centrale constante G qui est la même pour tout corps, (B) pourra être écrite sous la forme $\sum_{i=0}^{m} GM_i dg_i = 0$ (g_v étant la distance du corps de masse M_v au centre de la force G) qui équivaut à $\sum_{i=0}^{m} M_i dg_i = 0$. Une intégration très simple permet alors de conclure que, dans ce cas, la somme $\sum_{i=0}^{m} M_i g_i$ doit être un extrême (ou bien, d'après Maupertuis, un maximum ou un minimum). Si on suppose que pour chaque v la distance g_v soit infinie, de cela il suit que :

« ... pour que le système soit en équilibre, *il faut que le centre de gravité de tous les corps qui le composent soit le plus bas ou le plus haut qu'il soit possible, ou le plus près ou le plus loin du centre de force.* » (*Ibid.*, 173.)

motrices (33); 2° que, ce principe étant donné, Maupertuis en tire la loi du repos en passant par l'intermédiaire d'une condition comme (B), qui ne demande aucunement la restriction sur la nature fonctionnelle des forces, restriction qui est au contraire contenue dans l'énoncé de cette loi; 3° qu'une telle condition (B) exprime un principe déjà énoncé par Varignon dans sa *Nouvelle Mécanique* (œuvre posthume parue en 1725), à la suite d'une lettre de Jean Bernoulli (34), et bien connu dans la seconde moitié du XVIII^e siècle comme principe des travaux virtuels (35).

Il est alors naturel de se demander pourquoi Maupertuis ne s'est pas arrêté à la condition plus générale contenue dans le principe de Bernoulli-Varignon, en présentant au contraire comme tout à fait nouveau un principe qui dérive de ce dernier sous des conditions restrictives relativement à la nature des forces.

Quelques éléments d'une réponse peuvent être suggérés par la lecture de certains paragraphes de la *Mécanique* de Ernst Mach (36). Bien que Mach identifie complètement la loi du repos de Maupertuis au principe des travaux virtuels, il revient, pour clarifier le contenu de ce dernier, à l'énoncé de Maupertuis en le liant directement à la démonstration d'un tel principe donnée par Lagrange dans la deuxième édition de la *Mécanique analytique* (37). On représente le système S par une machine à moufles construite de manière qu'on puisse remplacer toutes les forces qui agissent sur les corps par la gravité agissant sur un poids Γ qui est fixé à une extrémité de la corde qui relie entre eux les moufles du système (38). Les

(33) Si une telle condition est en effet évidente — étant donné les principes newtoniens — dans le cas d'un système constitué par des corps attachés à un centre fixe par des barres rigides et immobiles l'une relativement aux autres (ou bien, telles qu'elles forment entre elles des angles invariables), la même évidence disparaît pour des systèmes de nature différente.

(34) Cf. Varignon (1725), t. II, 174-176, où l'auteur cite une lettre de Jean Bernoulli qui contient la formulation du principe. A la vérité, Varignon n'utilise pas son principe, se limitant à le déduire dans une foule de cas particuliers (cf. *ibid.*, i. II, 176-223), à partir d'un ensemble d'axiomes exprimant les principes newtoniens et le principe de la décomposition des forces (cf. *ibid.*, i. I, 4-6).

(35) Sur la relation entre le principe de Bernoulli-Varignon et celui des travaux virtuels sous la forme « canonique » qui lui sera donnée par Lagrange moyennant la substitution, aux différentielles dp_i, dq_i, ..., dw_i, des variations correspondantes, cf. Panza (1991-1992).

(36) Cf. Mach (1883), chap. 1, sect. IV, paragr. 13-22, 62-75.

(37) Cf. Lagrange (1811-1815), vol. 1, 23-26. J'ai présenté la démonstration de Lagrange dans la reconstruction de Mach en Panza (1991-1992), paragr. I.

(38) On note que cèla est possible seulement si les forces qui agissent sur les corps du système sont commensurables. Mach ne fait toutefois aucune allusion à cette restriction qui avait d'ailleurs déjà été remarquée par Lagrange.

différentes configurations du système correspondront alors à des positions différentes de Γ sur une droite déterminée qui représente la direction de la force de gravité. Tout mouvement du système peut ainsi être représenté par une courbe $y = f(t)$ décrite par le centre de gravité de Γ par rapport à des coordonnées orthogonales dont l'origine est soumise à une translation uniforme selon la direction de l'axe des abscisses et dont l'axe des ordonnées a la même direction que la gravité (fig. 1). A l'inverse, à chaque déplacement fini du centre de gravité de Γ relativement à un tel système de coordonnées, correspondra un travail effectué qui sera exprimé par la somme des travaux élémentaires correspondant aux déplacements infinitésimaux qui composent le déplacement fini dont il est question, ou bien par une intégrale définie du premier membre de l'équation (B). La configuration initiale étant fixée, telle intégrale peut être envisagée comme une fonction de la limite supérieure d'intégration ou bien de l'abscisse t de la courbe $y = f(t)$. Or, d'après Mach, le principe de Maupertuis revient à dire que

« lorsque le système passe par une conformation d'équilibre, le travail effectué sera plus petit ou plus grand, avant et après l'équilibre, que pour la conformation d'équilibre même (39) ».

On peut alors le justifier et l'expliquer en même temps au moyen du raisonnement suivant :

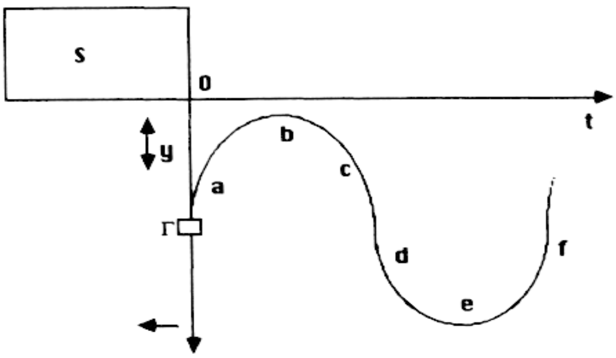

Fig. 1.

« Lorsque [...] [le centre de gravité de Γ] est en l'un des points a, c, d, de la courbe, il existe des conformations voisines pour lesquelles le poids Γ se trouve plus haut ou plus bas que pour la conformation donnée. Si

(39) Cf. Mach (1883), 69.

donc le système est abandonné à lui-même, le poids descendra et le système se mettra en mouvement. Dans ces cas il n'y a donc pas d'équilibre. Si [...] [le centre de gravité de Γ] est en e le poids Γ est plus bas que toutes les conformations voisines et le système, abandonné à lui-même, ne changera pas sa conformation. Au contraire, il reviendra sur tout déplacement qu'on lui donnerait à partir de cette position, à cause de la propriété que les poids ont de tendre vers le bas. *Une hauteur minimum du poids, ou bien un maximum de travail effectué dans le système correspond donc à l'équilibre stable.* Si le [...] [le centre de gravité de Γ] se trouve en b, tout déplacement fini abaisse le poids Γ, qui alors continue de lui-même ce déplacement. Mais si le déplacement est infiniment petit le [...] [le centre de gravité de Γ] se meut sur la tangente en b qui est horizontale et le poids ne descend pas : *une hauteur maximum du poids* Γ, *c'est-à-dire un minimum de travail effectué dans le système, correspond à l'équilibre instable* (40). »

Si les forces sont du type supposé par Maupertuis, ce simple raisonnement nous permet de conclure : 1° que les configurations qui correspondent à un maximum ou à un minimum de la somme $\sum_{i=1}^{m} M_i\left[P_i p_i^{n+1} + Q_i q_i^{n+1} + \ldots + W_i w_i^{n+1}\right]$ sont respectivement des configurations d'équilibre stable ou instable, et 2° qu'il n'y a pas d'autres configurations d'équilibre que celles qui correspondent à un point où cette somme a une différentielle nulle. La condition demandée par Maupertuis — en dépit de l'énoncé de sa loi du repos, mais conformément à sa démonstration — n'est ainsi qu'une condition suffisante d'équilibre du système S. Si l'on peut voir ici un argument pour qualifier ultérieurement le principe de Maupertuis — une fois qu'il sera énoncé correctement — de moins général que celui de Bernoulli-Varignon, il y a bien des raisons de considérer la perte de généralité qui dérive de sa substitution à ce dernier comme fort bénéfique. Car le raisonnement de Mach montre d'une manière très simple comment le déplacement de l'attention de la condition de nullité de la somme des travaux virtuels aux condition d'extrémalité d'une fonction qui exprime le travail total du système permet de classer les configurations de repos par rapport à la nature spécifique de l'équilibre qui s'y produit. Si Maupertuis semble bien loin d'avoir une compréhension complète d'un tel avantage, il doit certainement avoir saisi, même d'une manière confuse, la plus grande puissance descriptive de son principe par rapport au

(40) Cf. *ibid.*, 70.

principe de Bernoulli-Varignon. C'est à une telle puissance qu'il semble avoir sacrifié la plus grande généralité de ce dernier. L'exclusion mathématiquement injustifiée des points extrémaux autres que les maxima et les minima suggère d'ailleurs de rechercher la source d'une telle intuition dans la nature, pour ainsi dire, anthropomorphique d'une loi de maximum ou minimum. Si, d'un point de vue strictement mathématique, Mach a certainement raison quand il observe que

« pour les lois dynamiques [...], qui sont exprimées sous la forme d'un théorème de maximum ou minimum, ce n'est pas le maximum ou le minimum qui est important, mais plutôt la notion de la *détermination univoque* (41) »,

toujours est-il que la « détermination univoque » exprimée par une condition de maximalité ou minimalité se relie immédiatement, à la différence de toute autre, à l'idée d'une volonté qui agit en vue d'un certain but. Tout au contraire, une « détermination univoque » des conditions d'équilibre exprimée par la nullité de la somme algébrique des forces motrices ou des travaux correspondant à un déplacement infinitésimal virtuel des corps du système ne se présente à première vue que comme une conséquence intuitive de la notion d'équilibre elle-même. La difficulté que j'ai cherché à mettre à jour dans la partie I ci-dessus se dévoile ainsi dans toute son évidence. A l'apparence intuitive d'une différence profonde entre la nature épistémologique d'une loi de maximum ou minimum et un principe de nullité de la somme des forces motrices — qu'entraîne ici un principe de nullité des travaux virtuels — (mais on pourrait répéter le même raisonnement pour une loi de conservation relativement à une symétrie du système), s'oppose la possibilité d'une déduction mathématique qui conduit du second à la première, sous la simple condition que les forces soient proportionnelles à une puissance quelconque de la distance au centre de leur point d'application (42). Un lien déductif vient alors s'interposer entre deux principes dont un relève intuitivement d'une tautologie et l'autre d'une contingence guidée par une volonté

(41) Cf. Mach (1905), 380.

(42) Une telle restriction n'a clairement ici d'autre fonction que celle de permettre une intégration aisée de manière à pouvoir référer la condition d'extrémalité à une forme non intégrale.

créatrice (43). C'est à l'intérieur d'une telle contradiction apparente que semblent se dérouler les réflexions de Maupertuis.

Si, après Hamilton, on peut certainement qualifier une telle question de métaphysique (au sens péjoratif), ce n'est que par le biais d'une telle métaphysique que la puissance descriptive et explicative du principe de moindre action (dont la loi du repos n'est qu'un simple cas particulier) semble se présenter aux yeux de Maupertuis. Le fait de ne pas voir derrière cette « métaphysique méprisable » une voie d'accès à une des intuitions les plus heureuses de la science moderne est à mon sens une faute grave tant sur le plan historique qu'épistémologique. La difficulté à rendre compatibles entre elles les deux intuitions de Maupertuis n'est d'ailleurs pas éliminée une fois qu'on a accepté de qualifier le principe de moindre action de « purement mathématique »; car elle n'est au fond que la difficulté de comprendre comment le formalisme des mathématiques peut s'appliquer à la description, à l'explication et à la prévision des phénomènes de la nature.

III. — Le *Traité de dynamique* de d'Alembert et la réduction de la dynamique à la statique

La proposition avancée par Maupertuis en 1740 est ainsi de fonder la statique sur un principe qui, bien que moins général que

(43) Je me détache ici de manière radicale de l'interprétation de Mach qui conclut sa reconstruction par la remarque suivante :

> « Une vue d'ensemble de la question montre que dans le principe des travaux virtuels il ne se trouve rien d'autre que la reconnaissance d'un fait qui nous était instinctivement familier depuis longtemps, mais que nous ne saisissions pas d'une façon aussi précise ni aussi claire. Le fait est le suivant : les corps pesants ne se meuvent d'eux-mêmes que vers le bas. » (Mach (1883), 74.)

Or, la conception des lois de la mécanique comme simple « reconnaissance (ou résumé) des faits » (empiriques) relève à son tour d'une métaphysique qui n'est certainement pas plus faible que celle que Mach aurait voulu éliminer de la science (cf. par exemple, *ibid.*, 1). C'est seulement à l'intérieur d'un cadre catégoriel qui permet d'opérer avec des objets mathématiques qu'un raisonnement comme celui de Mach semble être possible. Si à l'intérieur de ce cadre, on veut parler de faits, ceux-ci ne peuvent pas être confondus avec des « effets phénoménaux purs », car les faits ne peuvent être envisagés ici que comme des relations particulières et singulières parmi des objets mathématiques. Si l'intérêt scientifique d'un tel cadre — qu'en suivant J. Petitot, on pourrait qualifier d' « objectivité catégoriale » (cf. par exemple Petitot (1987), 202-203) — dépend de la capacité représentative des phénomènes des systèmes qu'on peut construire à l'intérieur, une telle relation de représentation ne peut aucunement être réduite au simple acte de résumer (ni à la simple généralisation inductive).

celui de Bernoulli-Varignon, semble posséder une plus grande puissance descriptive et s'approche d'une sorte d'axiome métaphysique d'épargne de la nature.

Tout à fait opposée, par contre, est l'approche de d'Alembert qui, dans son *Traité de dynamique* (44), propose de fonder toute la mécanique sur le principe d'inertie, la décomposition des mouvements, et un nouveau principe — qu'on qualifiera de *premier principe de d'Alembert* — qui affirme que :

> *Premier principe de d'Alembert.* « Si deux Corps dont les vitesses (45) sont en raison inverse de leurs masses, ont des directions opposées, de telle manière que l'un ne puisse se mouvoir sans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux Corps (46). »

Ce dernier principe lui paraissant d'ailleurs encore trop loin, en tant que tel, de l'intuition commune, il en fournit une déduction à partir du cas où les masses des deux corps sont égales et les « vitesses » égales et contraires (47).

Le programme de d'Alembert semble répondre à un double objectif. D'un côté, il vise non seulement à fonder toute la mécanique sur des principes qu'on puisse qualifier d'évidents (48), mais aussi à réduire la science du mouvement à celle de l'équilibre; de l'autre, il s'efforce d'éliminer de la mécanique toute référence aux forces, envisagées comme des entités réelles, caractérisables et déterminables indépendamment de leurs effets respectifs.

(44) Cf. d'Alembert (1743) et (1758). A propos du traité de d'Alembert, cf. Fraser (1985), auquel je renvoie pour toute précision.

(45) Pour l'explication du terme « vitesse », cf. plus bas.

(46) Cf. d'Alembert (1743), 37 et (1758), 50-51. (Dans la suite, quand nous renverrons à ces deux éditions du *Traité de dynamique de d'Alembert,* en l'absence d'indication de date, le(s) premier(s) numéro(s) de page(s) renverra(ont) à l'édition de 1743, le(s) second(s) à celle de 1758.)

(47) Ceci est d'après d'Alembert le seul cas « où l'équilibre se manifeste d'une manière claire et distincte » (*ibid.,* XIV et XV). L'usage de la terminologie cartésienne peut, au moins en partie, nous éclairer sur l'origine philosophique des soucis de d'Alembert (cf. Fraser (1990), 248-249). La réduction de la mécanique aux principes mentionnés n'est d'ailleurs qu'une partie d'un programme plus général de réductionnisme mathématique qui est bien exposé tout au début de la préface.

(48) Voici comment d'Alembert s'exprime dans la préface de son *Traité* :

> « Je me suis proposé dans cet Ouvrage de satisfaire à ce double objet, de reculer les limites de la Mécanique, et d'en applanir l'abord; et mon but principal a été de remplir en quelque sorte un de ces objets par l'autre, c'est-à-dire, non-seulement de déduire les Principes de la Mécanique des notions les plus claires, mais de les appliquer aussi à de nouveaux usages; de faire voir tout à la fois, et l'inutilité de plusieurs Principes qu'on avoit employé jusqu'ici dans la Mécanique, et l'avantage qu'on peut tirer de la combinaison des autres pour le progrès de cette Science; en un mot d'étendre les Principes en les réduisant. » (D'Alembert (1743), IV et (1758), IV-V.)

« Le Mouvement uniforme d'un Corps, écrit d'Alembert, ne peut être altéré que par quelque cause étrangère. Or de toutes les causes, soit occasionnelles, soit immédiates, qui influent dans le Mouvement des Corps, il n'y a tout au plus que l'impulsion seule dont nous soyons en état de déterminer l'effet par la seule connaissance de la cause [...]. Toutes les autres causes nous sont entiérement inconnues; elles ne peuvent par conséquent se manifester à nous, que par l'effet qu'elles produisent en accélérant ou retardant le Mouvement du Corps, et nous ne pouvons les distinguer les unes des autres que par la Loi et la grandeur connue de leurs effets, c'est-à-dire, par la Loi et la quantité de la variation qu'elles produisent dans le Mouvement (49). »

Ce qu'on appelle « force accélératrice » agissant sur un corps ne peut ainsi être regardé que comme la « simple expression du rapport de dv à dt » (50). Sa prise en considération n'est qu'une manière plus ou moins convenable de traiter les vitesses des corps et leurs variations. En introduisant le symbole φ pour représenter une telle force, l'équation $\varphi dt = dv$ n'est alors qu'une définition (51). De là d'Alembert semble conclure que l'emploi de la notion de force dans la formulation et la résolution des problèmes concernant le mouvement ou l'équilibre d'un système de corps peut être avantageusement évité; ou bien que les désavantages évidents qui proviennent d'un langage plus lourd et moins immédiat, qu'évite cet emploi, sont largement compensés (surtout qu'il s'agit de fondements de la mécanique) par une plus grande clarté conceptuelle, par un gain de « rigueur » (52).

(49) Cf. *ibid.,* 16-17 et 22-23.

(50) Cf. *ibid.,* 18 et 25.

(51) D'Alembert prend ainsi position d'une manière très nette dans la querelle sur le statut logique du deuxième principe de Newton (cf. la partie I ci-dessus) :

« La plûpart des Geométres, écrit-il, présentent sous un autre point de vûe l'Equation $\varphi dt = dv$ entre les temps et les vitesses. Ce qui n'est, selon nous, qu'une hypothese, est érigée par eux en Principe. Comme l'accroissement de la vitesse est l'effet de la cause accéleratrice, et qu'un effet, selon eux, doit être toujours proportionnel à sa cause, ces Geométres ne regardent pas seulement la quantité φ comme la simple expression du rapport de du à dt; c'est de plus, selon eux, l'expression de la force accélératrice, à la quelle ils prétendent que dv doit être proportionnel, dt étant constant; delà ils tirent cet axiôme général, que le produit de la force accélératrice par l'Elément du tems est égal à l'Elément de la vitesse. M. *Daniel Bernoulli* [...] [cf. D. Bernoulli (1726)] prétend que ce Principe est seulement de verité contingente, attendu qu'ignorant la nature de la cause et la maniére dont elle agit, nous ne pouvons savoir si son effet lui est réellement proportionnel, ou s'il n'est pas comme quelque puissance ou quelque fonction de cette cause. M. Euler, au contraire, s'est efforcé de prouver fort au long dans sa Mécanique [cf. Euler (1736), en particulier t. 1, cap. II, prop. 20 et coroll., 63-65], que ce Principe est de verité nécessaire. Pour nous, sans vouloir discuter ici si ce Principe est de verité nécessaire ou contingente, nous nous contenterons de le prendre pour une définition, et d'entendre seulement par le mot de force accélératrice, la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionnel. » (*Ibid.,* 18-19 et 24-25.)

(52) Voici un autre passage tiré de la préface du *Traité* de d'Alembert :

« Tout ce que nous voyons bien distinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'est qu'il parcourt un certain espace, et qu'il employe un certain temps à le parcourir. C'est donc de cette seule idée

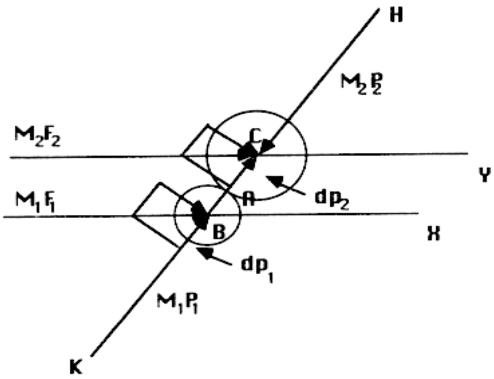

Fig. 2.

C'est précisément cette dernière conviction qui — accompagnée de l'absence de tout souci de rigidité sémantique dans l'emploi de certains termes clés (53) et par le choix d'un style strictement géométrique — rend le *Traité* de d'Alembert très difficile à lire. Le premier principe de d'Alembert est un bon exemple de cette difficulté. Il énonce la condition d'équilibre d'un système à deux corps (inélastiques) qu'on peut avantageusement représenter par deux cercles tangents entre eux au point A. En employant la structure catégorielle usuelle de la mécanique post-newtonienne, on peut imaginer (fig. 2) ces corps comme animés par deux forces M_1P_1 et M_2P_2 (M_1 et M_2 étant les masses des deux corps) agissant toutes les deux suivant la direction de la droite BC unissant les centres B et C des deux cercles, mais de telle sorte que la première pousse le premier corps vers le centre H et que la seconde pousse le second corps vers le centre K. Pour appliquer le principe de Bernoulli-Varignon (54), on imagine deux nouvelles forces M_1F_1 et M_2F_2 agissant respectivement sur les points B et C suivant deux directions parallèles entre elles et poussant les deux corps vers les centres X et Y. Ceci étant posé, il est très facile de décomposer les éléments infinitésimaux de ces dernières forces en deux composants orthogonaux, dont un — indiqué respectivement par dp_1 et dp_2 — possède la même direc-

qu'on doit tirer les Principes de la Mécanique, quand on veut les démontrer d'une maniére nette et précise; ainsi on ne sera point surpris qu'en conséquences de cette réflexion, j'ai, pour ainsi dire, détourné la vûe de dessus les *causes motrices*, pour n'envisager uniquement que le Mouvement qu'elles produisent; que j'ai entiérement proscrit les forces inhérentes au Corps en Mouvements, êtres obscurs et Métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même. » (*Ibid.*, XVI et XVI-XVII.)

(53) Cf. Truesdell (1960), 186-187.

(54) Cf. n. 34 *supra*.

tion BC que les forces M_1P_1 et M_2P_2. Le principe de Bernoulli-Varignon nous dit alors que le système constitué par les deux corps de masses M_1 et M_2 et par les forces M_1P_1 et M_2P_2 est en équilibre si la somme $M_1P_1dp_1 + M_2P_2dp_2$ est égale à zéro, $M_1P_1dp_1$ et $M_2P_2dp_2$ étant ce que Bernoulli appelle les « énergies » et dp_1 et dp_2 ce qu'il appelle les « vitesses virtuelles des forces M_1P_1 et M_2P_2 ».

Bien que très élégante et aisément généralisable, cette formulation de la condition d'équilibre du système donné n'est pas compatible avec le programme de d'Alembert, étant essentiellement fondée sur la prise en considération de certaines forces imaginaires ou bien virtuelles. Pour éviter d'introduire de telles entités, celui-ci est alors obligé de penser le système dont il est question comme une configuration particulière d'un système de deux corps de masses respectives M_1 et M_2, qui avancent l'un vers l'autre suivant la direction de la droite BC unissant leurs centres respectifs. A tout instant τ, de tels corps possèdent une vitesse instantanée qu'on peut indiquer respectivement par $v_1(\tau)$ et $v_2(\tau)$. Soit t l'instant auquel un choc se produit entre les deux corps au point A. Pris à la lettre, le premier principe de d'Alembert affirme que les deux corps restent alors en équilibre entre eux si les vitesses $v_1(\tau)$ et $v_2(\tau)$ sont dans le même rapport que les masses M_2 et M_1. Il est toutefois clair que l'état du système aux instants suivant t ne dépend aucunement de la vitesse que les corps possèdent en t, mais de celle qu'ils y acquièrent, ou bien de l'accélération instantanée. En posant $dt = 1$ et en remplaçant les vitesses par leurs différentielles (55), on aura alors l'équation $M_1dv_1(t) + M_2dv_2(t) = 0$ qui, au-delà de la lettre de l'énoncé de ceci, semble bien exprimer en termes analytiques le principe de d'Alembert. La correspondance entre ce dernier et le principe de Bernoulli-Varignon est alors aisément saisissable, une fois qu'on a remarqué que dans le cas en question les différentielles dp_1 et dp_2 sont égales entre elles. Cette égalité entre les « vitesses virtuelles des différentes forces » n'étant pas garantie (au premier ordre) pour tout système matériel, le programme de d'Alembert n'est fondé que sur la

(55) Une telle substitution me semble s'accorder avec l'interprétation des principes et des résultats de d'Alembert donnée par Truesdell et Fraser (cf. n. 60 *infra*), qui ne se réfèrent, à la vérité, qu'au « principe général » de la dynamique donné par d'Alembert dans la deuxième partie de son traité (à son propos, cf. ci-dessous).

confiance (56) dans le fait de pouvoir réduire toute situation d'équilibre à celle considérée ici.

Le contenu du premier principe de d'Alembert ayant été clarifié, il reste à voir comment ce dernier peut suffire, à côté de la loi d'inertie et de la décomposition du mouvement, à résoudre des problèmes de dynamique (57). Cela n'est évidemment possible qu'à condition de disposer d'une méthode de réduction qui permette de ramener tout problème concernant le mouvement d'un système de corps à un nouveau problème concernant l'équilibre d'un système associé. C'est justement la conjonction de cette méthode et du principe précédent qui donne lieu au principe généralement connu comme *principe de d'Alembert,* bien qu'en tant que tel il ne soit jamais formulé dans le *Traité de dynamique.* Tout ce que fait d'Alembert c'est de traduire sa méthode de réduction en un nouveau « principe » — qu'on qualifiera de *deuxième principe de d'Alembert* — qui n'exprime justement que les modalités d'une telle réduction. Ce principe ne participe ainsi à la fondation de la mécanique que comme principe de réduction. Ce n'est que l'application du premier principe qui, en déterminant les conditions d'équilibre du nouveau système, permet la détermination des équations du mouvement du système donné. Voici la formulation de d'Alembert :

> *Deuxième principe de d'Alembert.* « Décomposés les Mouvemens *a, b, c* &c. imprimés à chaque Corps, chacun en deux autres $\mathfrak{a}$, α; $\mathfrak{b}$, β; $\mathfrak{c}$, γ; &c. qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux Corps que les Mouvemens $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ &c. ils eussent pû conserver ces Mouvemens sans se nuir réciproquement; & que si on ne leur eût imprimé que les Mouvemens α, β, γ, &c. le systême fut demeuré en répos; il est clair que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ [&c]. seront le Mouvemens que ces Corps prendront en vertu de leur action (58). »

La terminologie de d'Alembert est encore obscure (59), mais elle a été bien éclaircie par Truesdell et Fraser (60). Il s'agit, d'après

(56) D'Alembert ne développe pas véritablement l'analyse de l'équilibre, n'allant pas au-delà de l'exposition du principe (cf., de toute façon, d'Alembert (1743), paragr. I, 37-48 et (1758), 50-71).

(57) D'Alembert se limite, à la vérité, à traiter explicitement les cas où les corps du système interagissent entre eux par des impulsions directes ou par l'intermédiaire d'autres corps (comme verges, cordes, etc.). L'extension de sa méthode au cas d'une interaction due à des forces réciproques d'attraction est, toutefois, assez simple.

(58) Cf. *ibid.*, 51 et 74-75.

(59) Dans une définition préliminaire (cf. *ibid.*, 50 et 73), il assimile le « mouvement » d'un corps à la « vitesse de ce même Corps considérée en ayant égard à sa direction ».

(60) Truesdell (1960), 187 et Fraser (1983), 224-225.

leur interprétation, de considérer les mouvements des différents corps du système comme le résultat d'une double accélération : celle imprimée aux corps de l'extérieur et celle qui dérive de « l'action mutuelle » que les corps exercent entre eux. La méthode se réduit ainsi à décomposer l'accélération du_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) imprimée à chaque corps du système en deux accélérations dv_i et $d\upsilon_i$, la deuxième étant celle qui est productrice de l'équilibre, et la première la seule responsable du mouvement effectif (61). De là il est donc possible de poser, par la connaissance préalable de dv_i, et la détermination de $d\upsilon_i$ au moyen du premier principe de d'Alembert, des équations différentielles qui expriment la vitesse instantanée v_i de chaque corps (62).

Après avoir résolu, à l'aide de cette méthode, un certain nombre de problèmes dynamiques, d'Alembert en dérive la conservation des forces vives dans de nombreux cas particuliers (63) qu'il interprète simplement comme une propriété de la somme $\sum_{i=1}^{n} M_i[v_i]^2$ à laquelle il n'attribue aucun contenu physique particulier (64).

(61) Car, si l'accélération imprimée $A^{(I)}$ produit une accélération totale $A^{(T)}$, l'impression de la seule accélération $A^{(T)}$ conduit aux mêmes résultats, la différence $A^{(E)} = A^{(I)} - A^{(T)}$ — soit l'accélération qui découle de l'action mutuelle des corps et des contraintes du système — n'ayant aucun effet sur le mouvement réel. Le deuxième principe de d'Alembert peut ainsi être réduit, d'après Truesdell, à l'assertion selon laquelle « *no total force or total torque is exerted by the constraints and mutual forces* » (Truesdell (1960), 188). En termes analytiques, on aura alors les équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{m} M_i A_i^{(E)} = \sum_{i=1}^{m} M_i (A_i^{(I)} - A_i^{(T)}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \times M_i A_i^{(E)} = \sum_{i=1}^{m} r_i \times M_i (A_i^{(I)} - A_i^{(T)}) = 0.$$

(62) Si une telle interprétation est correcte, l'exclusion de toute prise en considération des forces se réduit ici à un pur artifice verbal.

(63) D'Alembert affirme à la vérité que sa méthode suffit pour démontrer le principe dans chaque cas particulier (où il a lieu) (cf. *ibid.*, 169 et 253).

(64) On observe que le principe prend, dans la formulation de d'Alembert, une extension considérable en se référant tant aux systèmes de corps interagissant entre eux, qu'à ceux animés par des forces extérieures, où « la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses à chaque instant, est égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses initiales, plus les quarrés des vitesses que les Corps auroient acquis, si étant animés par les mêmes puissances, ils s'étoient mûs librement chacun sur la ligne qu'il a décrit » (*ibid.*, 169 et 252-253).

Même si les procédés de d'Alembert restent en grande partie géométriques (65), son *Traité* est un manifeste explicite du réductionnisme mathématique appliqué à la mécanique. Le point de départ de Lagrange, qui va faire de l'achèvement de ce programme un de ses objectifs scientifiques, ne fut ainsi que l'adaptation des suggestions de d'Alembert à une « nouvelle philosophie » analytique, au moyen d'une reformulation des principes (66) et de l'introduction d'un langage symbolique apte à générer des preuves sous la forme de pures déductions formelles.

IV. — Le mémoire sur la réfraction de la lumière de Maupertuis et la première formulation du principe de moindre action

L'approche de d'Alembert ne convainquit ni Maupertuis ni Euler, qui, en 1744, avancèrent, indépendamment l'un de l'autre (67), la proposition de résoudre certains problèmes de mécanique à l'aide d'un principe de maximum ou minimum. On va considérer en premier lieu la proposition de Maupertuis (68).

Bien que celui-ci n'aborde directement dans son mémoire de 1744 que le problème de la réfraction de la lumière, son approche est telle que toute la mécanique semble être concernée, la question étant de montrer l'accord entre la loi de la réfraction et « une autre que la Nature doit suivre encore plus inviolablement (*sic*) (69) »,

(65) La déduction de la conservation des forces vives (sur celle-ci, cf. Fraser (1985), 155-159) est elle-même basée sur une décomposition géométrique des « vitesses » au moyen de la loi du parallélogramme et sur les propriétés des figures qu'on en tire.

(66) Cette reformulation est aussi une simplification basée essentiellement sur la réintroduction de la notion de force.

(67) A propos de l'indépendance entre les travaux de Maupertuis et d'Euler, cf. la lettre envoyée au premier par le second le 10 décembre 1745 (cf. Brunet (1938), 61-62 et Euler (Œuvr.), sér. IV-A, vol. VI, 56-58). Cette lettre — ainsi que toutes celles, partiellement publiées par Brunet, qui ont été écrites par Euler à Maupertuis entre 1745 et 1748 (cf. *ibid.*, 61-79) — est aussi très intéressante pour éclairer les différences entre les deux approches. Toutes ces lettres ont été publiées de nouveau, et intégralement, par P. Costabel dans le volume VI, sér. VI-A des *Opera Omnia* d'Euler — cf. Euler (Œuvr.). Les notes et l'introduction de Costabel — cf. Costabel (1986) — en constituent d'ailleurs un commentaire éclairant; une bonne partie des conclusions que je tire ici de mon analyse des textes publiés s'y trouvent également formulées.

(68) Cf. Maupertuis (1744).

(69) Cf. *ibid.*, 418.

d'après laquelle « la Nature, dans la production de ses effets, agit toujours par les moyens les plus simples (70) ». Car, si ce n'était qu'à l'aide de cette dernière loi — transposée en un principe affirmant que la lumière suit toujours la trajectoire qui minimise le temps du déplacement — que Fermat (71) avait trouvé une « explication » de la réfraction, en déduisant métaphysiquement (72) que le sinus de l'angle de réfraction et le sinus de l'angle d'incidence sont dans un rapport constant, il avait fait reposer sa preuve sur l'affirmation que la lumière est plus lente dans les milieux les plus denses et plus rapide dans les milieux les plus rares. Une fois qu'on a accepté au contraire de considérer que la lumière est plus lente dans les milieux les plus rares et plus rapide dans les milieux les plus denses — comme le prétend Maupertuis —, le résultat de Fermat, bien que confirmé par l'expérience, tombe en contradiction avec le principe du temps minimal et donc avec la loi générale des moyens les plus simples, ainsi que Fermat lui-même l'avait interprétée. Le problème que Maupertuis se pose est donc celui de trouver une interprétation de la loi des moyens les plus simples qui puisse s'accorder avec la loi de la réfraction :

> « En méditant profondément sur cette matière, écrit-il, j'ai pensé que la lumière, lorsqu'elle passe d'un milieu dans un autre, abandonnant déjà le chemin le plus court [...], pouvoit bien aussi ne pas suivre celui du temps le plus prompt : en effet, quelle préférence devroit-il y avoir ici du temps sur l'éspace? la lumière ne pouvant plus aller tout-à-la fois par le chemin le plus court, et par celui du temps le plus prompt, pourquoi iroit-elle plûtôt par un de ces chemins que par l'autre? aussi ne

(70) Cf. *ibid.*, 421.

(71) Fermat avait calculé la trajectoire de réfraction à l'aide d'un principe de minimisation du temps dans un manuscrit envoyé à M. de La Chambre en février 1662 (?) et publié en 1667 par Clerselier dans le troisième tome des *Lettres de Mr. Descartes*, à la suite d'un autre manuscrit sur le même thème envoyé au même correspondant le 1[er] janvier 1662 (cf. Descartes (Lettr.), t. III, 260-265 et Fermat (Œuvr.), t. I, 173-179).

(72) Maupertuis semble détacher, dans sa courte reconstruction historique, la « découverte » de la loi de la réfraction — qu'il attribue à Snell (cf., pour la même attribution, Montucla (1799-1802), vol. II, 244) — de sa justification ou, comme il l'écrit, de son « explication ». On aurait essayé de parvenir à cette dernière en suivant trois voies différentes : soit, d'après Descartes, en cherchant à déduire la loi de la réfraction des principes de la dynamique (en interprétant le mouvement de la lumière comme le mouvement d'un corpuscule); soit, d'après Newton, en recourant à l'hypothèse d'une force attractive agissant sur la lumière; soit enfin, d'après Fermat, en se basant sur un principe qualifié de métaphysique (le débat sur la réfraction entre Fermat, Descartes et Leibniz est reconstitué dans Dugas (1950), 244-249). Il va sans dire que c'est cette dernière voie qui semble à Maupertuis la meilleure.

suit-elle aucun des deux, elle prend une route qui a un avantage plus réel : *le chemin qu'elle tient est celui par lequel la quantité d'action est la moindre.*

« Il faut maintenant expliquer ce que j'entends par la quantité d'action. Lorsqu'un corps est porté d'un point à un autre, il faut pour cela une certaine action : cette action dépend de la vîtesse qu'a le corps et de l'espace qu'il parcourt, mais elle n'est ni la vîtesse ni l'espace pris séparément. La quantité d'action est d'autant plus grande que la vîtesse du corps est plus grande, et que le chemin qu'il parcourt est plus long, elle est proportionnelle à la somme des espaces multipliéz chacun par la vîtesse avec laquelle le corps les parcourt.

« C'est cela, c'est cette quantité d'action qui est ici la vraie dépense de la Nature, et ce qu'elle ménage le plus qu'il est possible dans le mouvement de la lumière (73). »

Si l'approche de Maupertuis est déjà très claire dès ces considérations d'ouverture, elle le devient encore plus si l'on considère l'application d'un tel principe de minimisation de la « quantité d'action ». On suppose que la lumière traverse la ligne de séparation R entre deux milieux différents (fig. 3). Soient A et B deux points fixes qu'on considère comme le point de départ et le point d'arrivée d'un rayon lumineux ARB (R étant considéré comme un point indéterminé de la droite R). Il s'agit alors de déterminer quel chemin ce rayon doit parcourir en allant de A à B pour minimiser la « quantité d'action » (74), à savoir la somme $(AR)v_1 + (RB)v_2$, v_1 et v_2 étant les vitesses constantes de la lumière dans les deux milieux. En posant comme condition que la différentielle d'une telle somme s'annule, on aurait ainsi tout simplement :

$$\text{(C)} \quad d[(AR)v_1 + (RB)v_2] = \frac{v_1[(CR)d(CR)]}{\sqrt{(AC)^2 + (CR)^2}} - \frac{v_2[(CD - CR)d(CR)}{\sqrt{(BD)^2 + (CD - CR)^2}} = 0,$$

ou bien :

$$\text{(D)} \quad \frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BC} = v_2 : v_1,$$

comme la loi de la réfraction le veut.

(73) Cf. Maupertuis (1744), 423.

(74) On remarque que les données du problème ne sont pas, d'après Maupertuis, la position du point A et l'inclinaison du rayon lumineux qui sort de ce point (comme cela semblerait naturel), mais la position du point de départ de ce rayon et celle du point auquel il « doit » arriver. Le finalisme est ainsi intrinsèque à la formulation même du problème.

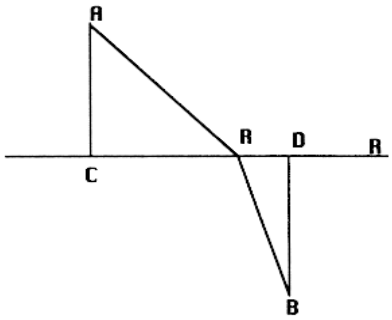

Fig. 3.

Bien que Maupertuis ne propose pas encore explicitement d'étendre son principe à la fondation de toute la mécanique, au moyen d'une généralisation convenable de la notion de « quantité d'action », ou bien de la formule qu'exprime cette dernière, on ne saurait s'abstenir de lire dans certains passages, qui suivent la simple démonstration précédente, l'affirmation implicite d'une telle possibilité.

« Tous les phénomenes de la réfraction, écrit-il, s'accordent maintenant avec le grand principe, que *la Nature, dans la production de ses effets agit toûjours par les voies les plus simples.* [...]

« Le vrai principe une fois découvert, j'en déduis toutes les loix que suit la lumière, soit dans sa propagation, dans sa réflexion, et sa réfraction [...].

« Je connois la répugnance que plusieurs Mathématiciens ont pour les *Causes finales* appliquées à la Physique, et l'approuve même jusqu'à un certain point; j'avoue que ce n'est pas sans péril qu'on les introduit : l'erreur où sont tombéz des hommes tels que Fermat et Leibnitz en les suivant, ne prouve que trop combien leur usage est dangereux. On ne peut cependant dire que ce n'est pas le principe qui les a trompés, c'est la précipitation avec laquelle ils ont pris pour le principe ce qui n'en étoit que des conséquences.

« On ne peut douter que toutes choses ne soient réglées par un Estre suprême qui, pendant qu'il a imprimé à la matière des forces qui dénotent sa puissance, l'a destinée à executer des effets qui marquent sa sagesse [...]. [...] si notre esprit étoit assez vaste, il verroit également les causes des effets Physiques, soit en calculant les propriétés des corps, soit en recherchant ce qu'il y avoit de plus convenable à leur faire executer.

« Le premier de ces moyens est le plus à notre portée, mais il ne nous mène pas fort loin. Le second quelquefois nous égare, parce que nous ne connoissons point assez quel est le but de la Nature, et que nous pouvons nous méprendre sur *la quantité,* que nous devons regarder comme *sa dépense* dans la production de ses effets.

« Pour joindre l'étendue à la sûreté dans nos recherches, il faut employer l'un et l'autre de ces moyens. Calculons les mouvements des corps, mais consultons aussi les desseins de l'Intelligence qui les fait mouvoir (75). »

V. — Le second appendice du *Methodus inveniendi* d'Euler et la mathématisation des causes finales

La même opposition notée par Maupertuis entre deux méthodes différentes, mais concordantes quant aux résultats qu'elles fournissent, — qui relève d'ailleurs de la distinction de 1740 entre deux sortes de principes de la mécanique — se retrouve à la base du programme exposé par Euler dans le second appendice du *Methodus inveniendi* (76), où ce dernier se propose d'étudier le mouvement d'un corps libre à l'aide d'un principe métaphysique affirmant que « *nihil omnino in mundo contingint, in quo non maximi minimive ratio quæpiam eluceat* (77) ». Jugé par rapport à son énoncé, un tel principe ne semble pas différer essentiellement, dans son statut épistémologique, du principe des moyens les plus simples de Maupertuis. Comme Maupertuis, Euler semble qualifier son principe de vérité métaphysique qui relève des causes finales. Pourtant, les liens entre le principe de départ et l'édifice mathématique de la nouvelle science sont envisagés par ces deux savants d'une manière fort différente. Car, si Maupertuis prétend avoir déterminé métaphysiquement, au moyen de la notion de « quantité d'action », la « quantité » que le mouvement des corps minimise, Euler prend garde de préciser que « *sæpenumero hoc ipsum maximum vel minimum difficillime perspicitur; etiamsi a priori Solutionem eruere licuisset* (78) ». Non seulement le mot « action » reste complète-

(75) Cf. *ibid.*, 424-426.
(76) Cf. Euler (1744), app. II, 311-320.
(77) Cf. *ibid.*, 245. Une telle formulation est tirée en vérité du premier appendice de la *Methodus inveniendi* (cf. *ibid.*, 245-310) où le principe énoncé est appliqué à l'étude des lames élastiques. Sur cet appendice, cf. Truesdell (1960), 199-225 et Fraser (1983), 199, qui interprètent le principe variationnel employé ici comme un postulat de minimisation de l'énergie potentielle.
(78) Cf. *ibid.*, 246.

ment absent du texte d'Euler, mais ce dernier semble refuser l'idée même qu'on puisse caractériser en termes généraux « la dépense » de la nature, ou bien qu'à un tel concept puisse correspondre une entité physique déterminable de manière univoque. La notion ontologique de dépense de la nature, que Maupertuis n'avait pas hésité à introduire (79), se transforme *de facto* chez Euler en une notion formelle qui ne se réfère qu'à une formule mathématique indéterminée.

Un tel point de vue ne s'accompagne pas pourtant, contrairement à ce qu'on a dit, de la négation du statut métaphysique du principe de départ. Celui-ci ne revient toutefois, d'après Euler, qu'à postuler la subsistance d'une « cause finale » agissant dans le monde, dont la nature n'est caractérisée que d'une manière très générique : le mouvement des corps répondrait d'après ce principe au but de rendre maximale ou minimale une certaine entité qu'on ne saurait pas déterminer *a priori* et en termes généraux. Comment peut-on alors faire d'un tel principe la base d'une science qui vise à *prévoir* les mouvements des corps et non simplement à les décrire? La réponse d'Euler ne peut que s'appuyer sur la légitimité d'une inférence inductive : le mouvement des corps étant en principe déterminable (80) tant par la considération des « causes finales » que par la « méthode directe » — ou bien par la considération de « causes efficientes » —, on peut, dans les cas les plus simples, établir les équations de ce mouvement par cette dernière méthode, chercher « la formule » que de telles équations maximisent ou minimisent et la généraliser à tous les cas de la même sorte; une infé-

(79) Si quelqu'un peut douter de la légitimité d'une telle lecture, en remarquant que Maupertuis ne fait, après tout, que qualifier de « quantité d'action » la somme qu'il sait être un minimum dans l'équation qui exprime la loi de la réfraction, je l'invite à comparer le mémoire de Maupertuis de 1744 sur la réfraction de la lumière avec son mémoire de 1746 sur « les loix du mouvement et de répos » (cf. la partie VI ci-dessous), où la généralisation seulement envisagée en 1744 est explicitement mise en place.

(80) Je me limite ici à présenter le programme d'Euler en restant fidèle à l'exposition très sobre choisie par celui-ci tant dans le premier paragraphe de l'appendice II de la *Methodus inveniendi* (cf. Euler (1744), 311) que dans le paragraphe 4 de son mémoire de 1748 sur « les plus grands et les plus petits qui se trouvent dans les actions des forces » (cf. Euler (1748a), 151-152), sur lequel je reviendrai dans la partie VII. Il n'est toutefois pas difficile de comprendre comment un tel programme repose sur la conviction que les mouvements des corps (ainsi que tout phénomène naturel) sont les effets tant des causes efficientes que des causes finales. C'est une telle métaphysique aristotélicienne qui semble alors *de facto* être à la base du programme scientifique eulérien dont on ne saurait nier les analogies très fortes avec la conception moderne du principe de moindre action — cf. par exemple Landau-Lifchitz (1969).

rence inductive très simple permettra alors de conclure que les conditions de maximum ou de minimum d'une telle formule généralisée contiennent les équations du mouvement de tout système du type considéré. Ce qu'Euler qualifie de « méthode directe » n'est d'ailleurs que l'analyse newtonienne des forces. L'idée de celui-ci n'est ainsi que d'analyser la solution de certains problèmes mécaniques trouvée à l'aide des seuls principes du premier type, dans le but de déterminer la condition de maximum ou de minimum correspondante, et de généraliser cette condition à tous les problèmes de la même sorte. C'est une telle généralisation qui constituerait alors un nouveau principe du second type apte à fournir la solution des problèmes les plus compliqués — où *« causæ efficientes nimis sunt absconditæ* (81) » — par le recours à la théorie des maxima et minima (qu'on peut considérer comme une méthode indirecte). Si l'affirmation de départ est, donc, intrinsèquement métaphysique, elle débouche sur un programme qui fournit une interprétation interne du principe : il ne s'agit pas de postuler la tendance de la nature à rendre une quantité physique donnée la plus grande ou la plus petite possible, mais de lier la solution de certaines classes de problèmes à une équation où la différentielle d'une certaine « formule », déterminable par des règles standard, est posée égale à zéro. Dans un tel contexte, on pourra donc interpréter le principe posé par Euler comme une affirmation de l'existence, pour tout système mécanique, d'une fonction (à plusieurs variables) dont les conditions de maximum ou de minimum fournissent les équations du mouvement du système considéré. Si on remarque qu'Euler exprime toujours cette fonction sous la forme d'une formule intégrale, on peut lire cette assertion comme une affirmation de l'existence d'un *lagrangien* pour tout système mécanique.

C'est justement à l'occasion d'une telle démarche qu'on retrouve chez Euler la même contradiction déjà remarquée chez Maupertuis dans les parties I et II ci-dessus (contradiction qui apparaît aussi d'ailleurs dans les passages cités à la fin de la partie IV). Car l'affirmation d'une présence simultanée, et donc d'une concordance par rapport aux effets, des causes efficientes et des causes finales s'accompagne de l'assignation d'un statut épistémologique diffé-

(81) Cf. Euler (1744), 245.

rent aux principes qui expriment ces deux sortes de causes; les premières étant considérées comme de simples expressions de certaines définitions mathématiques et les deuxièmes comme la manifestation d'une loi métaphysique. Le contenu d'une telle loi est d'ailleurs conçu comme inductivement dérivable de l'analyse des résultats tirés de l'application des principes du premier type aux cas les plus simples. Si la concordance entre les effets des causes efficientes et des causes finales se transpose ainsi dans un premier temps en une opposition entre ce qui est nécessaire et ce qui relève du contingent, elle en vient plus tard à se rétablir sous la forme d'une uniformité entre les solutions des problèmes les plus simples, qui ne demandent que l'emploi des principes du premier type, et celles des problèmes plus compliqués, qui relèvent plutôt des principes du second type.

Cela dit, on a seulement présenté le programme d'Euler tel qu'il est exposé tout au début de l'appendice II de la *Methodus inveniendi* (82). La question se pose de savoir si le texte d'un tel appendice correspond ou non à ce programme et s'il peut en quelque manière le clarifier. Malheureusement la réponse n'est que partiellement positive. Ce seront plutôt des mémoires parus successivement parmi ceux de l'Académie de Berlin entre 1748 et 1751 qui réaliseront le projet d'Euler. Ce sera ainsi seulement à partir de leur analyse qu'on pourra éclairer, dans les paragraphes suivants, les nombreux points obscurs que les quelques considérations précédentes n'ont certainement pas éliminés. Je me limiterai ici à reconstruire d'une manière sommaire le contenu de la suite de l'appendice cité.

Une fois son programme présenté, Euler semble concevoir le rôle de son court appendice comme étant de fournir de bonnes justifications pour le principe de départ, relativement au cas particulier des trajectoires d'un corps attiré par des forces centrales. D'après un tel principe, le fait qu'un corps attiré par certaines forces suive une trajectoire plutôt qu'une autre dépend, comme tous les « effets de la nature », de la correspondance d'une telle trajectoire avec une loi de maxima et minima. Le problème se pose de déterminer cette loi en déterminant ce que la trajectoire

(82) Cf. n. 76 *supra*.

suivie rend maximum ou minimum. La démarche suivie par Euler pour répondre à une telle question ne correspond que partiellement au programme esquissé ci-dessus. Après avoir avancé une hypothèse, fondée sur un faible argument intuitif, il montre que dans trois exemples particuliers les trajectoires correspondant à la loi conjecturée sont les mêmes que celles déterminées par la méthode directe, et il déduit une telle loi à partir des principes newtoniens, avec l'hypothèse que la vitesse ponctuelle du corps ne dépend que de sa position. Il avance enfin un nouvel argument métaphysique en faveur de sa conjecture, fondé sur une interprétation finaliste du principe d'inertie. D'après la classification proposée dans la partie I ci-dessus, les justifications d'Euler relèvent ainsi autant des *preuves métaphysiques* (première et quatrième justifications) que des *preuves mathématiques a posteriori* (deuxième justification) et *a priori incomplètes* (troisième justification).

Voici d'abord les deux arguments métaphysiques :

« [...] *cum [effectus a viribus sollicitantibus oriundus] in motu corporis genito consistat, veritati consentaneum videtur hunc ipsum motum, seu potius aggregatum omnium motuum qui in corpore projecto insunt, minimum esse debere* (83). »

« *Quoniam* [...] *corpora, ob inertiam, omni status mutationi reluctantur; viribus sollicitantibus tam parum obtemperabunt, quam fieri potest, siquidem sint libera; ex quo efficitur, ut, in motu genito, effectus a viribus ortus minor esse debeat, quam si ullo alio modo corpus vel corpora fuissent promota* (84). »

Si (85) M est la masse du corps et $\sqrt{h}=v$ la vitesse (86) avec laquelle il parcourt un élément d'espace d*s*, le « *motum corporis collectivum per spatiolum* d*s* » sera donné par le produit $\mathrm{M}ds\sqrt{h}$, de

(83) Cf. Euler (1744), 311. Tout de suite après avoir avancé son hypothèse, ainsi faiblement justifiée, Euler écrit :

« *Quæ conclusio etsi non satis confirmata videatur, tamen, si eam cum veritate jam a priori nota consentire ostendero, tantum consequetur pondus, ut omnia dubia quæ circa eam suboriri queant penitus evanescant.* » (*Ibid.*).

(84) Cf. *ibid.*, 320.

(85) Cf. *ibid.*, paragr. 2, 311-312.

(86) Comme il est bien connu, l'identité $v = \sqrt{h}$ (où $h = \frac{2gx}{\mathrm{M}}$ est proportionnelle à la hauteur x depuis laquelle un corps de masse M doit tomber pour toucher la terre avec une vitesse v) est d'un usage courant dans la *Mechanica* d'Euler (cf. Euler (1736), def. 15, scol. 1, 80); pour des raisons d'uniformité, j'ai changé ici la notation $\sqrt{v}$ qui, d'après Euler, exprime la vitesse, en $\sqrt{h} = v$.

sorte que, selon l'hypothèse précédente, la courbe-trajectoire doit être celle qui, comparée à toutes les courbes possibles dont les extrêmes sont fixes, rend minimum l'intégrale $\int \mathrm{M}\mathrm{d}s\sqrt{h}$ ou bien l'intégrale $\int \mathrm{d}s\sqrt{h} = \int h\mathrm{d}t$ (qui peut d'ailleurs être envisagée comme la somme des forces vives agissant à chaque instant).

Une telle conjecture ayant été avancée en s'appuyant sur des arguments purement métaphysiques, il s'agit maintenant d'apporter en sa faveur des arguments mathématiques. Le premier de ces arguments est, comme on l'a déjà signalé, un argument *a posteriori* (87). En dépit de ses déclarations initiales, Euler ne cherche pas à retrouver la condition de minimalité de $\int \mathrm{d}s\sqrt{h}$ dans la solution, déjà connue par la méthode directe, d'un certain nombre de problèmes choisis pour leur simplicité et leur exemplarité. Une fois choisis trois problèmes classiques — le mouvement inertiel d'un corps en l'absence de toute force, le mouvement d'un corps projeté dans le vide et sollicité par une gravité constante ou variable ou par une force quelconque, l'orbite d'un corps projeté dans le vide et attiré par une force centrale dont le centre est fixe —, il part au contraire de l'équation $\mathrm{d}\left(\int \mathrm{d}s\sqrt{h}\right) = 0$ et en déduit des résultats qui s'accordent avec ceux qu'on sait déterminer au moyen de la méthode directe (88). Le procédé d'Euler sera éclairci par la prise en considération du deuxième problème (dans le cas le plus général d'une force attractive quelconque).

Soit ASB (fig. 4) la trajectoire d'un point matériel lancé en A parallèlement à l'horizon CB et sollicité par deux forces (89) $\mathrm{X} = \mathrm{X}(x)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}(y)$ agissant respectivement selon les directions de deux coor-

(87) Cf. Euler (1744), app. II, paragr. 3-12, 312-318.

(88) On peut trouver de bonnes raisons mathématiques pour cette inversion de la preuve *a posteriori*. Car, même dans les cas les plus simples, le passage de l'équation qui exprime la solution donnée par la méthode directe à une équation analogue de la forme $\mathrm{d}\left(\int \mathrm{Z}\mathrm{d}x\right) = 0$ demande bien souvent des transformations loin d'être naturelles.

(89) Ces deux forces peuvent bien être pensées comme les composantes orthogonales d'une force quelconque.

données orthogonales RS $= x$ et QS $= y$. En accord avec les seuls principes newtoniens (90), on aura alors : $\mathrm{d}h = -\mathrm{X}\mathrm{d}x - \mathrm{Y}\mathrm{d}y$, ou bien : $h = \mathrm{K} - \int \mathrm{X}\mathrm{d}x - \int \mathrm{Y}\mathrm{d}y$, $\sqrt{h}$ étant la vitesse du point en S et K une constante d'intégration. D'après le principe supposé, la trajectoire ASB devra alors satisfaire la condition suivante (où l'on pose $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$) :

$$
\begin{aligned}
\text{(E)} \qquad \int \mathrm{d}s\sqrt{h} &= \int \sqrt{h(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)} \\
&= \int \mathrm{d}x \sqrt{(1+p^2)\left[\mathrm{K} - \int \mathrm{X}\mathrm{d}x - \int \mathrm{Y}\mathrm{d}y\right]} \\
&= \int \mathrm{d}x\sqrt{h(1+p^2)} = \text{Max ou Min.}
\end{aligned}
$$

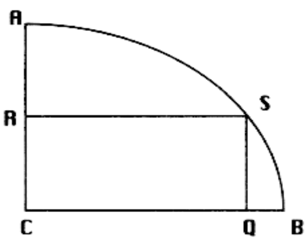

Fig. 4.

Il s'agira alors de dériver d'une telle condition une équation entre les coordonnées de positions x et y qui exprime la trajectoire cherchée. Or, Euler vient juste de démontrer dans son traité que si $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}(x, y, p)$, $\mathrm{dZ} = \mathrm{M}\mathrm{d}x + \mathrm{N}\mathrm{d}y + \mathrm{P}\mathrm{d}p$ et $\int \mathrm{Z}\mathrm{d}x$ = Max ou Min, on aura aussi $\mathrm{N}\mathrm{d}x = \mathrm{dP}$ (91). En posant $\mathrm{Z} = \sqrt{h(1 + p^2)}$

(90) Cf. Euler (1736), t. II, prop. 23, 92-93.

(91) Cf. Euler (1744), prop. III, 42-43 : dZ étant la différentielle totale de Z, les coefficients M, N et P seront respectivement donnés par les dérivées partielles $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial Z}{\partial y'}$ (x, y et y' étant prises comme des variables indépendantes entre elles). L'équation $\mathrm{N}\mathrm{d}x = \mathrm{dP}$ n'est donc que l'équation d'Euler-Lagrange, $\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y'}\right) = 0$, correspondant à la position $\delta \int \mathrm{Z}\mathrm{d}x = 0$.

et au moyen de certaines manipulations algébriques convenables, on n'aura alors aucune difficulté à tirer de (E) l'équation différentielle suivante :

$$\text{(F)} \qquad \frac{2\mathrm{d}p}{1+p^2} = \frac{\mathrm{X}\mathrm{d}y - \mathrm{Y}\mathrm{d}x}{\mathrm{K} - \int \mathrm{X}\mathrm{d}x - \int \mathrm{Y}\mathrm{d}y}.$$

Pour montrer l'accord avec les résultats déjà connus — dans les cas les plus simples — au moyen des méthodes directes, il suffit alors d'intégrer cette équation. L'équation ordinaire de la trajectoire sera alors la suivante :

$$\text{a) } p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{-(\mathrm{K}+\mathrm{H}) + \int \mathrm{Y}\mathrm{d}y}}{\sqrt{\mathrm{H} + \int \mathrm{X}\mathrm{d}x}}$$

(G) ou bien

$$\text{b) } \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{K}+\mathrm{H}) - \int \mathrm{Y}\mathrm{d}y}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\mathrm{H} - \int \mathrm{X}\mathrm{d}x}},$$

qui exprime bien une parabole si X et Y sont prises comme constantes et une ellipse si on pose, par contre, $\mathrm{X} = \mathrm{X}(x) = 2x$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}(y) = 2y$.

On en vient maintenant à l'argument mathématique *a priori* incomplet (92). Soit la vitesse ponctuelle $\sqrt{h}$ d'un corps exprimée par une fonction quelconque $\mathrm{F}(x, y)$ de deux coordonnées orthogonales telles que l'on ait, par hypothèse (93), $\mathrm{d}h = \mathrm{S}\mathrm{d}x + \mathrm{T}\mathrm{d}y$.

(92) Cf. *ibid.*, app. II, paragr. 14-15, 318-320.

(93) La preuve d'Euler est — comme on l'a dit ci-dessus — soumise à l'hypothèse que la vitesse ponctuelle du corps ne dépend que de sa position. Une telle hypothèse, concernant la nature du mouvement, est ici remplacée par une hypothèse équivalente, concernant la forme fonctionnelle des forces agissant sur le corps ; la démonstration peut ainsi se dérouler en termes strictement analytiques. Réinterprété en termes modernes, l'argument mathématique *a priori* proposé par Euler revient ainsi à démontrer le principe de moindre action pour le mouvement d'un corps libre sur lequel agissent des forces quelconques admettant un potentiel (cf. Jouguet (1908-1909), part. I, 204).

De quelque sorte que soient les fonctions $S = S(x)$ et $T = T(y)$, le corps se déplace ainsi comme s'il était sollicité par deux forces orthogonales exprimées par ces fonctions, ou bien par une force tangentielle à sa trajectoire exprimée par la fonction $\frac{Sdx + Tdy}{ds}$ et une force normale exprimée par la fonction $\frac{-Tdx + Sdy}{ds}$. « Par la nature du mouvement libre », on aura alors :

$$\text{(H)} \qquad \frac{2h}{r} = \frac{-Tdx + Sdy}{ds} = \frac{-T + Tp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

r étant le rayon du cercle osculateur à la trajectoire dans le point (x, y) et p le rapport différentiel dy/dx (94). Or, il n'est pas difficile de voir que le même résultat dérive de l'application du principe conjecturé. $\int dx\sqrt{h(1+p^2)}$ étant, en général, la formule à rendre la plus petite, on aura en effet, en posant encore $Z = \sqrt{h(1 + p^2)}$:

$$\text{(I)} \qquad dZ = d\left[\sqrt{h(1+p^2)}\right] = \frac{Sdx\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{h}} + \frac{Tdy\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{h}} + \frac{pdp\sqrt{h}}{2\sqrt{1+p^2}}.$$

L'équation d'Euler-Lagrange donne ainsi :

$$\text{(J)} \qquad \frac{Tdx\sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{h}} = d\left(\frac{p\sqrt{h}}{2\sqrt{1 + p^2}}\right) = \frac{dp\sqrt{h}}{(1+p^2)^{3/2}} + \frac{p(Sdx + Tdy)}{2\sqrt{h(1 + p^2)}},$$

d'où (H) dérive sans aucune difficulté (r étant, comme on le sait, donné par $r = \frac{(1 + p^2)dx\sqrt{1 + p^2)}}{dp}$.

Même si l'on concède à Euler que les deux arguments mathématiques sont assez forts pour « éliminer chaque doute » à propos

(94) Euler utilise ici encore des résultats tirés de sa *Mechanica* (cf. Euler (1736), t. II, prop. 23, 92-93 et t. I, prop. 70, 227-228).

du principe de minimalité associé au mouvement d'un corps isolé attiré par des forces centrales (95), la question se pose de savoir si un tel principe peut être appliqué aussi à l'étude du mouvement d'un système à plusieurs corps sur lesquels agissent des forces centrales (ou à la résolution d'autres problèmes mécaniques, comme l'équilibre d'un fluide ou le mouvement d'un fil flexible). Bien qu'une telle question soit évidemment essentielle pour évaluer l'intérêt de la proposition d'Euler, celui-ci ne lui consacre qu'une simple mention :

> « *Neque vero hæc proprietas in motu unius corporis tantum cernetur, sed etiam in motu plurium corporum conjunctim; quæ quomodocunque in se invicem agant, tamen semper summa omnium motuum est minima. Quod, cum huismodi motus difficulter ad calculum revocentur, facilius ex primis principiis intelligitur, quam ex consensu calculi secundum utramque Methodum instituti* (96). »

C'est justement cette difficulté à élargir les preuves mathématiques *a posteriori* au cas des systèmes à plusieurs corps, ou bien la difficulté à étudier de tels systèmes au moyen des principes newtoniens, qui fait, comme on l'a dit, l'intérêt du principe d'Euler et en général des principes du second type. Pour montrer cela, il faut toutefois aller au-delà des considérations contenues dans le second appendice du *Methodus inveniendi* et aborder concrètement l'étude du mouvement des différents systèmes à plusieurs corps à l'aide d'un principe variationnel.

VI. — Le « principe de la moindre quantité d'action » de Maupertuis

Si, indépendamment de toute preuve, on généralise (au moyen d'une présupposition de linéarité) le résultat obtenu par Euler dans le cas du mouvement d'un corps isolé dans un champ central au

(95) On note qu'Euler est bien loin de penser que la condition à laquelle est soumise la démonstration précédente constitue une limite du principe général, relativement au mouvement d'un corps libre.

(96) Cf. Euler (1744), 320. C'est ici qu'Euler introduit le second argument métaphysique mentionné ci-dessus.

cas du mouvement d'un système de plusieurs corps (autant fermé que plongé dans un champ extérieur), on parvient à la formulation d'un principe variationnel qui présente une intéressante analogie formelle avec la loi du repos de Maupertuis, généralisée à son tour au cas d'un système de plusieurs corps sur lesquels agissent des forces centrales quelconques. Car, si $\Psi_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, m)$ est la force totale agissant sur le ν-ième corps du système et ψ_ν est une distance prise dans sa direction et calculée d'un point fixe quelconque (97), les deux principes nous disent que les deux équations $d\left(\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu \int \Psi_\nu d\psi_\nu\right) = 0$ et $d\left(\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu \int v_\nu ds_\nu\right) = 0$ expriment respectivement la condition de l'équilibre et le mouvement des systèmes considérés. Le premier qui remarqua cette analogie fut Euler dans une lettre à Maupertuis du 10 décembre 1745 (98).

« Je crois aussi, écrit-il, Votre principe [celui du repos] plus général que Vous ne le proposez; et je suis persuadé que, dans un système des corps quelconque qui se trouve en repos, où chaque particule est poussée selon une certaine direction par une force *motrice* Ψ, prenant dans la meme direction un élément d'espace $= d\psi$ [...] $\int \Psi d\psi$ sera un maximum ou un minimum; mais dans ce cas j'avoue qu'on ne saurait plus demontrer ce principe si geometriquement que Vous l'avez fait. Sur la fin de mon traité des Isopérimètres [...] je fis [...] voir que, dans le mouvement la nature observe constamment un certain maximum ou minimum; et j'ai déterminé par un tel principe toutes les courbes trajectoires, que les corps, qui sont attirés vers un centre fixe, ou qui s'attirent réciproquement doivent decrire. [...] s'il y a plusieurs corps M_1, M_2, M_3, &c. qui s'attirent mutuellement selon une loi quelconque [...], le mouvement de tous ces corps ensemble sera tel, que $\int M_1 v_1 ds_1 + \int M_2 v_2 ds_2 + \int M_3 v_3 ds_3$ &c. sera un maximum. Il est vrai, que je ne saurois demontrer ce principe à la rigueur, mais comme il me fournit toujours la meme solution que les principes ordinaires de la mécanique, je suis tout à fait persuadé de sa vérité. En voilà donc une grande science, qui nous manque encore, et qui roule sur les principes generaux qui s'observent dans la nature, et il me semble que c'est là où reside la veritable metaphysique, en tant qu'elle renferme les premiers principes de la physique et de la mathé-

(97) En effet, si φ est la distance du corps au centre fixe de Ψ et k la distance entre ce centre et un point fixe quelconque pris sur la droite qui le joint au corps, on aura, évidemment, $\psi = \varphi - k$ et, donc, $d\psi = d(\varphi - k) = d\varphi$.

(98) Cf. n. 67 *supra*.

matique; de laquelle la metaphysique de Leibniz et de Wolff est encore bien éloignée. »

Bien que le terme « métaphysique » commence ici à prendre un sens nouveau (qui va devenir propre à la philosophie des lumières) (99) — en renvoyant, plutôt qu'à la structure cachée du *cosmos* et à son origine première, au réseau conceptuel et à l'architectonique d'une science — et bien qu'Euler ne semble donc envisager que la recherche des formes mathématiques à poser comme des extrêmes dans l'équilibre et le mouvement des différents systèmes mécaniques, une telle lettre ne semble pas avoir déterminé Maupertuis à changer son point de vue. Ainsi, quand, en 1746, fort du prestige acquis par sa nomination à la présidence de l'Académie de Berlin (100), il présente une généralisation du principe qu'il avait appliqué en 1744 à la détermination de la loi de la réfraction de la lumière (101), il ne peut que s'appuyer sur une rhétorique aussi astucieuse qu'obscure et dépourvue de toute capacité de suggestion d'un procédé mathématique univoque. En partant de la prétention selon laquelle le deuxième appendice de la *Methodus inveniendi* d'Euler n'était rien d'autre qu'une application du principe que lui-même avait proposé en 1744, il qualifie son nouveau mémoire de tentative de « tirer de la même source des vérités d'un genre supérieur et plus important (102) ».

Après avoir consacré le premier paragraphe (103) à l' « examen des preuves de l'existence de Dieu tirées des Merveilles de la nature », Maupertuis se propose dans le deuxième (104) de convaincre les lecteurs « qu'il faut chercher les preuves de l'existence de Dieu, dans les Loix generales de la Nature » — celles-ci étant « les Loix selon lesquelles le Mouvement se conserve, se distribue et se détruit [...] fondées sur les attributs d'une suprême Intelligence » — et donc qu'on peut faire « un usage plus heureux » de la mathématique, en la détournant des « besoins grossiers du

(99) J'ai discuté plusieurs fois de ce point avec G. Israël. Une grande partie des idées que j'expose dans cet article sont d'ailleurs les résultats de ces échanges, qui ont été très fructueux pour moi.

(100) Pour la biographie de Maupertuis, cf. Brunet (1929).

(101) Cf. Maupertuis (1746).

(102) Cf. *ibid.*, 267.

(103) Cf. *ibid.*, 268-277 et Maupertuis (1750), 1-34 (cf. l'annexe).

(104) Cf. Maupertuis (1746), 277-287 et (1750), 34-45 et 52-79.

corps ou des speculations inutiles de l'esprit » (105), pour l'employer dans la recherche de nouvelles preuves de l'existence de Dieu.

« Ces Philosophes [Aristote et Malebranche] n'ont mis la cause du Mouvement en Dieu, écrit-il, que parce qu'ils ne savoient où la mettre : ne pouvant concevoir que la Matière eût aucune efficace, pour produire, distribuer et détruire le Mouvement, ils ont eu recours à un Etre immatériel. Il falloit savoir que toutes les loix du Mouvement et du repos étoient fondées sur le principe le plus convenable, pour voir qu'elles devoient leur établissement à un Etre tout puissant et tout sage; soit que cet Etre agisse immédiatement; soit qu'il ait donné aux Corps le pouvoir d'agir les uns sur les autres; soit qu'il ait emploié quelqu'autre moien qui nous est encore moins connu.

« [...] Après tant de grands hommes qui ont travaillé sur cette matiere, je n'ose presque dire que j'ai découvert le principe universel, sur lequel toutes ces loix sont fondées; qui s'étend egalement aux Corps durs et aux Corps élastiques; d'où dépendent le Mouvement et le Repos de toutes les substances corporelles.

« C'est le principe de la *moindre quantité d'action* : principe si sage, si digne de l'Etre suprême, et auquel la Nature paroît si constamment attachée; qu'elle l'observe non seulement dans touts ses changements, mais que dans sa permanence, elle tend encore à l'observer (106). »

Alors même qu'il ne serait pas difficile de montrer les nombreuses contradictions et difficultés dans lesquelles se débat Maupertuis — qui ne semble pas avoir décidé si c'est la soumission du monde à une « suprême Intelligence » qui justifie le « principe de la moindre quantité d'action », ou *vice versa* ce dernier qui prouve l'existence d'une telle Intelligence (107) —, je ne me limiterai ici qu'à la considération d'un tel principe par rapport à la détermination du mouvement et de l'équilibre des systèmes mécaniques, ou

(105) Cf. Maupertuis (1746), 277-278; cf. aussi (1750), 36-37.

(106) Cf. Maupertuis (1746), 282 et 286; cf. aussi (1750), 58-59 et 73-75. Tout à la fin de ce texte, Maupertuis semble évoquer l'analogie entre loi du repos et principe de moindre action, en allant jusqu'à faire transparaître une interprétation de la première comme « prolongement » du second. Cette brève remarque restera toutefois isolée dans l'œuvre de Maupertuis et ne sera suivie par aucune élaboration mathématique. Ce sera plutôt Euler qui développera cette intuition (cf. ci-dessous).

(107) Selon la très généreuse interprétation de Tonelli, la preuve de Maupertuis de l'existence de Dieu serait en réalité le résultat d'une double inférence. La « notion de Dieu » ayant été d'abord présupposée « à titre d'hypothèse », Maupertuis en déduirait les lois du mouvement, dont la correspondance constatée avec les effets de la nature fournirait une preuve indirecte de l'existence de Dieu (cf. Tonelli (1987), 18). Même si on voulait convenir d'une telle interprétation, on ne saurait éviter de remarquer que, ainsi reconstruite, la preuve de Maupertuis relève d'une forme logique très problématique : ⌈A ⇒ B, B, donc : A⌉ .

bien à l'analyse du troisième paragraphe du mémoire dont il est question. Voici, donc, l'énonciation de Maupertuis :

> *Principe de la moindre quantité d'action de Maupertuis.* « Lors qu'il arrive quelque changement dans la Nature, la Quantité d'Action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible.
>
> « La *quantité d'Action* est le produit de la Masse des Corps, par leur vîtesse et par l'espace qu'ils parcourent (108). »

En dépit de la généralité de l'énoncé, Maupertuis ne fournit aucune justification, se limitant à relier le principe à la sagesse de Dieu et à en donner trois applications : le choc entre deux corps durs ou élastiques animés par des mouvements uniformes rectilignes colinéaires et la détermination du point d'équilibre d'un levier. Ceci ne serait pas encore trop regrettable si, au moins, l'énoncé précédent et, faute de cela, les exemples présentés, nous fournissaient les moyens d'une extension aisée de ces applications à des cas de différentes sortes. Malheureusement ces précisions restent absentes du mémoire de Maupertuis. La « quantité d'action », dit-il, est « le produit de la masse des corps, par leur vîtesse et par l'espace qu'ils parcourent »; mais si ce n'est que « la quantité d'action nécessaire pour le changement » qui doit être la plus petite, comment peut-on savoir quelle est la vitesse que, dans les différents cas, on doit considérer; et de quel espace s'agit-il; et encore, comment déterminer la quantité d'action totale nécessaire au changement d'un système à partir de la quantité d'action propre aux corps qui le composent?

Si ces objections sont tout à fait inévitables, Maupertuis ne pouvait pas répondre sans perdre la principale richesse qu'il attachait à son principe, sa grande portée cosmologique, sa puissance métaphysique, son pouvoir explicatif du monde. Il ne peut ainsi rien faire d'autre qu'adapter son énoncé aux différents exemples qu'il considère au moyen de différentes interprétations choisies *ad hoc,* de manière à obtenir des résultats déjà connus (109).

Dans le cas du choc de deux corps animés par des mouvements rectilignes colinéaires, la quantité d'action à considérer ne dépend ainsi, d'après Maupertuis, que de la différence entre les vitesses de chaque corps avant et après le choc et de l'espace que ces mêmes

(108) Cf. Maupertuis (1746), 290; cf. aussi (1750), 75.

(109) Cf. Costabel (1986), 15-16, qui interprète d'ailleurs le procédé de Maupertuis comme une « expérimentation originale de la méthode *a posteriori* suggérée par Euler ».

corps auraient parcouru s'ils se mouvaient pendant un certain temps — qu'on peut toujours considérer comme unitaire — à une vitesse égale à cette même différence. La condition d'annulation de la différentielle de la quantité d'action se réduit de cette manière à la condition de conservation de la quantité de mouvement et le problème peut être ainsi aisément résolu par Maupertuis, au moyen d'un simple travestissement de la méthode connue (110). Voici comment Maupertuis justifie son affirmation, dans le cas où les mouvements des deux corps (respectivement de masse M_1 et M_2) ont le même sens (111).

« Le changement arrivé dans l'Univers [d'après le choc], consiste en ce que le corps [de masse] M_1, qui se mouvoit avec la vîtesse u_1, et qui dans un certain temps parcouroit un espace $= u_1$, ne se meut plus qu'avec la vîtesse v_1, et ne parcourt qu'un espace $= v_1$: le corps [de masse] M_2, qui ne se mouvoit qu'avec la vîtesse u_2, et ne parcouroit qu'un espace $= u_2$, se meut avec la vîtesse v_2 et parcourt un espace $= v_2$.

« Ce changement est donc le même qui seroit arrivé, si pendant que le corps [de masse] M_1 se mouvoit avec la vîtesse u_1, et parcouroit l'éspace $= u_1$, il eût été emporté en arrière sur un plan immatériel, qui se fût mû avec une vîtesse $u_1 - v_1$, par un espace $u_1 - v_1$; et que pendant que le corps [de masse] M_2 se mouvoit avec la vîtesse u_2, et parcouroit l'éspace $= u_2$, il eût été emporté en avant sur un plan immatériel, qui se fût mû avec une vîtesse $v_2 - u_2$, par un espace $v_2 - u_2$ (112). »

En notant u_1, v_1, u_2 et v_2 les vitesses respectives des deux corps avant et après le choc (et non, comme le fait Maupertuis, leur module), la « quantité d'action nécessaire pour le changement » sera exprimée en général par la somme $M_1(u_1 - v_1)^2 + M_1(u_2 - v_2)^2$ (le temps étant pris comme unitaire). En posant égale à zéro la différentielle de cette somme (u_1 et u_2 étant constantes), on aura alors, comme on l'a dit, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement : $- M_1u_1 + M_1v_1 - M_2u_2 + M_2v_2 = 0$. Si les

(110) Maupertuis oppose d'ailleurs la généralité de son principe au caractère particulier de celui de la conservation de la quantité de mouvement qui « n'est vraie que dans certains cas » (cf. Maupertuis (1746), 285 et (1750), 72).

(111) La prise en considération du cas contraire ne demande que de simples corrections locales du même argument que Maupertuis ne se lasse pas d'ailleurs de répéter.

(112) Cf. Maupertuis (1746), 292. Dans le mémoire de Maupertuis, ce texte ne se réfère proprement qu'au choc des corps élastiques et il est précédé par un texte tout à fait analogue traitant des corps durs où les deux vitesses v_1 et v_2 (ou bien α et β dans la notation de Maupertuis) sont remplacées par une vitesse commune x.

corps sont durs, on a d'ailleurs $v_1 = v_2$, tandis que, si les corps sont élastiques, on a $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$. En substituant, il est alors aisé de poser les équations suivantes qui s'appliquent respectivement aux chocs des corps durs et élastiques :

$$\text{(K)}\quad \begin{array}{l} \text{a)}\ v_1 = v_2 = \dfrac{M_1u_1 + M_2u_2}{M_1 + M_2} \\[2ex] \text{b)}\ v_1 = \dfrac{M_1u_1 - M_2u_1 + 2M_2u_2}{M_1 + M_2}\ ;\quad v_2 = \dfrac{M_2u_2 - M_1u_2 + 2M_1u_1}{M_1 + M_2}\ . \end{array}$$

La spéciosité des arguments de Maupertuis a été soulignée plusieurs fois dans les débats successifs (113) et montre assez bien le caractère *ad hoc* de l'interprétation du principe. Masqué par un énoncé ontologique fort général qui porte sur une véritable dépense de la Nature, c'est le raisonnement *a posteriori* qui donne le résultat : la solution étant connue, Maupertuis prend pour l'action la quantité qui, prise comme un minimum, permet de déduire le résultat correct. La pauvreté de la démarche mathématique de Maupertuis mise à part, c'est justement ce déguisement qui fait la faiblesse majeure de son procédé : loin d'ouvrir les portes, comme chez Euler, à une recherche mathématique de grande envergure, il transforme une intuition faible en une solution définitive, dont la généralité dérive de l'absence de tout contenu mathématique.

Ce procédé masqué réapparaît encore plus clairement dans le troisième exemple, où, sans aucune justification, Maupertuis suppose que l'équilibre d'un levier est donné par une longueur des bras qui rend minimum l'action relativement à un mouvement infiniment petit. Si les corps M_1 et M_2 sont attachés aux extrémités d'un levier de longueur k, dont z est le bras portant le premier corps, tout mouvement infiniment petit déplacera les corps sur deux arcs infinitésimaux dont le rapport est égal au rapport des bras. L'action totale sera alors proportionnelle à la somme $M_1z^2 + M_2(k - z)^2$ dont la différentielle est égale à zéro si $z = \dfrac{kM_2}{M_1 + M_2}$, ce qui est bien la condition connue (114).

(113) Cf. par exemple d'Arcy (1749), auquel Maupertuis répondra par son mémoire de 1752.

(114) Bien qu'arbitraire, le procédé de Maupertuis peut avoir été suggéré par la remarque de l'analogie qui subsiste entre le nouveau principe du mouvement et la loi du repos et

VII. — La généralisation du principe de moindre action : deux mémoires d'Euler de 1748

Bien que publié dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1746, l'article de Maupertuis ne parut qu'en 1748. Avant cette date, celui-ci l'envoya probablement à Euler, dont deux lettres datées du 24 mai et du 28 décembre 1746 se réfèrent, de toute évidence, à la version préliminaire (115).

« Il faut que j'avoue, écrit Euler dans la première, que je ne vois pas encore asses clairement, comment la considération de l'espace parcouru dans un temps donné doit entrer dans la determination de la quantité d'Action : je voudrois savoir s'il y a des cas, où cet espace n'est pas proportionnel à la vitesse ou non. Dans les exemples auxquels Vous appliques cette regle, je vois que cet espace est toujours exprimé par la vitesse meme, de sorte que la quantité d'action devient egale au produit de la masse par le quarré de la vitesse, dont le mouvement est changé. Si donc cela arrivoit constamment, il me semble que la chose deviendroit plus intelligible si l'on ajoutoit, qu'au lieu de cet espace, on pourroit toujours prendre la vitesse meme. Or s'il y avoit des cas où cela n'est pas permis [...] ne seroit-il pas à propos de faire mention de ces cas? Ou en tout cas, ne seroit-ce pas la meme chose de dire qu'il faut prendre l'espace divisé par le temps : ce qui me paroit plus precisément parlé, parce que le seul mot de temps, sans en determiner la quantité, pourroit quelque fois laisser quelque incertitude dans l'application (116). »

Cette citation reflète très bien le ton critique des lettres, dans lesquelles Euler ne fait que demander et suggérer à Maupertuis des précisions. Ce ne sera, toutefois, qu'au printemps 1748 que

on peut le lire comme une tentative de déduction, dans un cas particulier, du deuxième principe à partir du premier. La démarche inverse conduira Euler, et plus tard Lagrange, à une déduction du principe de moindre action qui produira à la fois sa légitimation définitive et la perte de son rôle central. Les cinq ans qui séparent le troisième mémoire de Maupertuis de la démonstration d'Euler sont toutefois riches d'un débat épistémologique qu'on va esquisser dans les paragraphes qui viennent.

(115) Cf. Brunet (1938), 62-65 et Euler (Œuvr.), sér. IV-A, vol. VI, 63-65 et 69-71. Que les lettres d'Euler se réfèrent à un texte différent de celui qui sera publié est prouvé par la discussion sur la notion de force, dans le deuxième paragraphe de la première lettre (cf. Costabel (1986), 15).

(116) Cf. Brunet (1938), 62 et Euler, *op. cit.* in n. 115, 63-64.

l'insatisfaction d'Euler s'exprimera dans deux mémoires (117) qui, suivant le programme déjà esquissé en 1744, visent à déterminer les conditions d'une application générale de la méthode des maxima et minima à la résolution des différents problèmes de la mécanique.

La question à laquelle Euler semble vouloir apporter une réponse peut *a posteriori* être formulée ainsi : la condition $\int v ds = \text{Min}$ (ou Max) — qui fournit le mouvement d'un corps libre sollicité par des forces centrales — ne peut-elle pas être envisagée comme une manifestation particulière d'une condition plus générale, qui ne fournit pas seulement le mouvement d'un système quelconque de corps libres dans un champ central, mais aussi la solution d'une classe plus large, voire de tous les problèmes de mécanique, et, le cas échéant, comment peut-on exprimer cette condition plus générale? Une telle question ne semble toutefois s'être présentée à Euler, dans toute sa généralité, qu'à l'issue de plusieurs recherches particulières, dont la plus importante fait l'objet du premier des deux mémoires cités et porte sur la possibilité d'exprimer par une condition de maximum ou minimum l'équilibre d'un fil parfaitement flexible ou élastique, dont chaque élément est sollicité par des forces quelconques (118).

Dans ce mémoire, comme dans son appendice de 1744, Euler emploie le langage philosophique des « causes finales » (119) pour

(117) Cf. Euler (1748a) et (1748b). Pour la référence au printemps, cf. les deux lettres à Maupertuis du 3 mai et du 14 juin 1748 (cf. Brunet (1938), 68-69 et 76-77 et Euler (Œuvr.), sér. IV-A, vol. VI, 102-103 et 118-119).

(118) Voici ce qu'Euler écrit à Maupertuis le 14 juin 1748 :

« ... je dois avouer que, dans ma piece precedente [évidemment (1748a)], je ne voyois pas encore assez clair dans cette matiere, mais à present tout me paroit lumineux et je n'y trouve plus aucun doute. » (*Ibid.*, 76 et 118.)

Si ce jugement a certainement un côté rhétorique, qu'on peut saisir par la lecture des lettres précédentes, datées respectivement des 8 et 9 mai et 4 et 8 juin (cf. Brunet (1938), 69-76 et Euler (Œuvr.), sér. IV-A, vol. VI, 104-109 et 112-118), qui contiennent les réponses d'Euler à des remarques polémiques de Maupertuis, et par certaines phrases de la même lettre (cf. *ibid.*, 77 et 119), il exprime assez bien le passage à une attitude fondationnelle.

(119) Voici le début du premier mémoire :

« C'est une verité dont on ne peut plus douter, que toutes les actions, qui sont produites par les forces de la nature, renferment constamment un *maximum* ou un *minimum*. [...] Cette considération nous conduit à reconnoitre un principe général de la nature, sur lequel toutes ses actions se règlent; et qui nous fait voir, que la nature se propose toujours un certain but, auquel elle tache de parvenir, en y employant les moindres dépenses. » (Euler (1748a), 148.)

mettre en place un programme mathématique fort différent de celui de Maupertuis. Bien qu'il ait désormais accepté de faire usage du terme d' « action », en lui reconnaissant un statut universel dans la mécanique, il ne semble pas avoir changé substantiellement son point de vue, la « quantité d'action » n'étant pas une entité déterminée *a priori,* mais plutôt la « quantité » — autrement indéterminée — représentée par la « formule », dont la condition de maximum ou minimum est contenue dans les différentes équations exprimant la solution des différents problèmes de mécanique, qu'il s'agisse de déterminer un certain mouvement, ou d'exprimer des conditions d'équilibre.

« C'est donc ce principe de *la moindre quantité d'action,* écrit-il, auquel Mr. de Maupertuis réduit tous les *maxima,* ou *minima,* que la Nature observe dans toutes ses productions : et la quantité d'action pourra toujours être réprésentée par une certaine formule algebrique, qui étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite, qu'elle obtiendroit, s'il étoit arrivé, tout autre effet (120). »

Si à la notion d'action est ainsi attachée une modalité formelle des comportements de la nature, ce qui semble être le plus important désormais c'est qu'on puisse aussi lui attacher, par l'analyse des cas particuliers, des formes analytiques sur lesquelles on puisse toujours opérer par un procédé *standard.* Si une telle démarche inductive ne peut évidemment pas aspirer à la démonstration *a priori* d'un principe général de la mécanique, elle est aussi la seule démarche propre aux mathématiques. Bien que demandant ainsi une sorte de complément métaphysique, les mathématiques gardent pour elles tant l'honneur d'indiquer les voies de la recherche que la charge d'en exprimer les résultats.

« [...] il est souvent trés difficile, écrit Euler, de découvrir la formule, qui doit être un *maximum,* ou un *minimum,* et par laquelle la quantité d'action est représentée. C'est une recherche qui n'appartient pas tant à la Mathematique, qu'à la Métaphysique puisqu'il s'agit de connoitre le but, que la nature se propose dans ses opérations : et ce seroit porter cette science à son plus haut degré de perfection, si l'on étoit en état d'assigner pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action, qui y est la plus petite, et qu'on pût la deduire des premiers principes de notre connoissance. Mais je crois que nous sommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, et qu'il sera presque impossible d'y arriver,

(120) Cf. *ibid.,* 150.

à moins que nous ne découvrions [par la méthode directe] pour un grand nombre de cas différens les formules, qui y deviennent des *maxima* ou *minima*. [...] Par ce moyen nous connoitrons *a posteriori* ces formules qui expriment la quantité d'action, et alors il ne sera plus si difficile d'en démontrer la verité par les principes connus de la Métaphysique (121). »

En même temps qu'un programme mathématique, c'est ainsi la voie d'une métaphysique nouvelle (122) qu'Euler semble vouloir indiquer : une métaphysique dont le but final n'est, à son tour, que l'édification d'une science mathématique de la nature. L'approche d'Euler va être éclairée par la prise en considération de ses résultats mathématiques.

Un « fil parfaitement flexible » (et sans épaisseur) « étant sollicité dans chacun de ses élémens par des forces quelconques », il s'agit de déterminer la « courbe » FNM (fig. 5) « à laquelle ce fil sera réduit » (123). Soit Mm = ds (s étant l'arc FM) un de ces éléments qu'on considère comme sollicité par une force (totale), dont l'intensité ne sera qu'infiniment petite (cette force n'agissant que sur un élément du fil), et qui pourra à son tour être décomposée en deux forces orthogonales Xds et Yds, respectivement parallèles aux axes AB = x et BM = y et orientées d'une manière opposée à ceux-ci. Il s'agira alors d'écrire une équation différentielle entre x et y, dont la solution exprime la courbe cherchée. Si l'on veut parvenir à ce résultat au moyen des seules méthodes directes, on doit postuler une condition d'équilibre portant sur les relations entre les forces agissant sur tout le fil. Voici l'affirmation d'Euler :

« Afin que le fil demeure en équilibre, puisqu'il est parfaitement fléxible, il faut que les momens de toutes les forces, dont la partie anterieure du fil FNM est sollicitée, par rapport au point M, se détruisent mutuellement (124). »

Pour calculer (125) la somme des moments de toutes les forces agissant sur le fil « par rapport au point M », on considère ce

(121) Cf. *ibid.*, 152.
(122) Sur ce point, cf. aussi la lettre à Maupertuis du 3 mai 1748 (Brunet (1938), 68-69 et Euler (Œuvr.), sér. IV-A, vol. VI, 102-103).
(123) Cf. Euler (1748a), « problème général », 153.
(124) Cf. *ibid.*
(125) Cf. *ibid.*, 153-155.

point comme fixe (et donc x et y comme constantes) et on prend une nouvelle abscisse variable (entre 0 et x) AL $= \varphi$, de sorte que LN $= \psi$ et FN $= \omega$ soient respectivement l'ordonnée et l'arc correspondants. L'élément Nn pourra alors être envisagé comme sollicité par deux forces orthogonales $\Phi d\omega$ et $\Psi d\omega$ parallèles aux axes et orientées d'une manière opposée à ceux-ci. Comme ces deux forces tendent respectivement à faire tourner le fil autour du point M de sorte à augmenter et à diminuer l'angle FMB, la somme de leurs moments « par rapport au point M » sera égale à $(y - \psi)\Phi d\omega - (x - \varphi)\Psi d\omega$. La somme des moments de toutes les forces agissant sur la portion FN du fil « par rapport au point M » sera alors donnée par l'intégrale

$$y\int_0^{\varphi}\Phi d\omega - \int_0^{\varphi}\psi\Phi d\omega - x\int_0^{\varphi}\Psi d\omega + \int_0^{\varphi}\varphi\Psi d\omega,$$

qu'Euler écrit sans indiquer les bornes d'intégration. Si maintenant on fait coïncider le point N avec le point M, et si l'on prend ceci comme variable, on en déduit par de simples substitutions que la condition d'équilibre peut être exprimée par l'équation

$$\text{(L)}\qquad y\int X ds - \int yX ds - x\int Y ds + \int xY ds = 0$$

qu'on écrit, en suivant Euler, sans spécification des bornes d'intégration. Une simple différentiation nous permet alors de passer à une équation plus simple, dont la solution exprime implicitement la courbe cherchée :

$$\text{(M)}\qquad dy\int X ds - dx\int Y ds = 0.$$

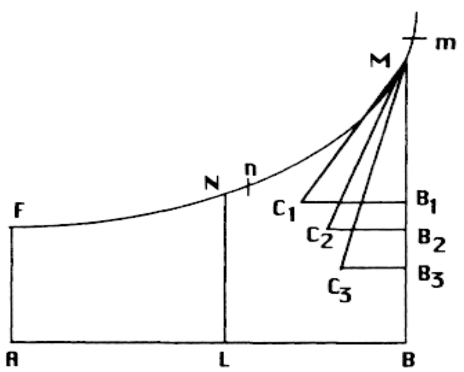

Fig. 5.

Cette solution générale ne peut, toutefois, être exprimée par une équation de la forme $\int Zdx$ = Max ou Min, l'application de la méthode des maxima et minima nécessitant la connaissance préalable de la nature des fonctions qui entrent dans la formule qui doit être supposée comme la plus grande ou la plus petite possible. La détermination de « l'expression qui représente la quantité d'action » relativement à l'équilibre d'un fil flexible exige ainsi que la « nature » des forces X et Y soit déterminée préalablement, ce qu'on ne peut faire que par rapport aux différents cas particuliers qui entrent dans le cadre du problème général. Pour exemplifier le procédé d'Euler, on considère son « problème 5 » (126) : trouver la courbe à laquelle se réduit la figure d'un fil parfaitement flexible (et sans épaisseur) dont chaque point est attiré vers un nombre quelconque de centres fixes par des forces exprimées par des fonctions quelconques de la distance au centre.

On note Λ_j la force agissant sur M (fig. 5) dont le centre est C_j et on pose : $C_jB_j = x_j$, $B_jM = y_j$, et $C_jM = \lambda_j$ ($j = 1, \ldots, \mu$) (de sorte qu'on ait, pour chaque j, $dx_j = dx$ et $dy_j = dy$). En décomposant chaque force selon deux directions orthogonales et parallèles aux axes, on trouve alors que, sur le point M, agissent en même temps les forces $\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Lambda_j x_j}{\lambda_j}$ et $\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Lambda_j y_j}{\lambda_j}$. En substituant dans (M) on aura ainsi :

$$\text{(N)} \qquad dy \int ds\left[\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Lambda_j x_j}{\lambda_j}\right] = dx \int ds\left[\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Lambda_j y_j}{\lambda_j}\right],$$

d'où Euler tire, par différentiations et intégrations successives (dx étant pris comme constante) :

$$\text{(O)} \qquad \frac{q}{1 + p^2}\left[\sum_{j=1}^{\mu} \int \Lambda_j d\lambda_j\right] = \sum_{j=1}^{\mu} \left[\frac{\Lambda_j (y_j - px_j)}{\lambda_j}\right]$$

$\left(\text{où on doit poser, comme d'habitude chez Euler, } p = \frac{dy}{dx} \text{ et } q = \frac{dp}{dx}\right)$.

(126) Cf. *ibid.*, 174-178.

La même équation étant dérivable en partant de la condition $\int ds \sum_{j=1}^{\mu} \int \Lambda_j d\lambda_j = \text{Min (ou Max)}$ (127), Euler en conclut que, dans ce cas, la quantité d'action est exprimée par l'intégrale $\int ds \sum_{j=1}^{\mu} \int \Lambda_j d\lambda_j$.

Bien que la condition précédente ne fournisse proprement que la solution d'un problème de mécanique fort particulier, on n'aura aucune difficulté à remarquer l'analogie qui la lie à la condition proposée par Maupertuis en 1740 pour l'équilibre d'un système de plusieurs corps attirés par des forces centrales. Car si on note $\Theta_\beta = d\Omega_\beta$ la somme des moments des forces agissant sur le β-ième corps de masse M_β $(1 \leq \beta \leq m)$ du système et par Ω la somme des moments des forces agissant sur un fil flexible $\left(\Omega = \sum_{j=1}^{\mu} \int \Lambda_j d\lambda_j\right)$, on pourra écrire la condition d'équilibre de ce dernier et celle demandée par la loi du repos respectivement sous les formes

$$\int ds\Omega = \text{Min (ou Max) et}$$
$$\sum_{i=1}^{m} M_i \int \Theta_i = \sum_{i=1}^{\mu} M_i\Omega_i = \text{Max ou Min.}$$

Bien qu'une telle analogie ne corresponde pas à une équivalence mathématique, Euler n'hésite pas à écrire :

> « En examinant cette expression de la quantité d'action $\left[\int ds\Omega\right]$, on la trouvera parfaitement d'accord avec celle que Monsieur de *Maupertuis* a publiée dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'An. 1740. Et qu'il a tirée de principes, qui tiennent plutot à la Métaphysique qu'à la Mecanique (128). »

Si une telle déclaration peut apparaître comme injustifiée ou bien tout à fait vague (selon la signification qu'on veut assigner

(127) On n'aura aucune difficulté à vérifier cette conclusion en comparant une telle condition avec la condition générique $\int Zdx$ $[Z = Z(x, y, p)]$, ce qui donne

$$Z = \sqrt{1+p^2}\left(\int \Lambda_j d\lambda_j\right) = \sqrt{1+p^2}\left(\int \Lambda_\varphi \frac{x_j dx + y_j dy}{\lambda_j}\right).$$

(128) Cf. *ibid.*, 180.

au terme « accord »), elle se présente, lors d'une analyse plus attentive, comme un pont jeté vers une nouvelle perspective mathématique, bien au-delà de l'horizon restreint dans lequel restait enfermée la réflexion de Maupertuis (129). Libéré de tout souci théologique ou ontologique, Euler peut réinterpréter la loi du repos elle-même comme une manifestation particulière du principe de moindre action, qui, loin d'être envisagé comme la détermination de la véritable « quantité » dont la nature fait l'économie dans ses mouvements, n'est désormais plus autre chose que l'affirmation de la possibilité de représenter chaque loi particulière de la mécanique en termes variationnels et cela par l'emploi de la somme Ω des intégrales des moments de certaines forces. Ce qui semble ainsi s'esquisser c'est un programme très ambitieux d'unification de toute la mécanique au moyen de l'emploi d'un formalisme mathématique universel, plutôt que par son inscription dans une seule chaîne déductive.

Les lettres qu'Euler envoie à Maupertuis le 9 mai et les 4 et 8 juin (130) montrent d'une manière assez nette la clarification progressive de ce programme. Dans la première, il remarque que, dans le cas du mouvement libre d'un point attiré par les forces Λ_j ($j = 1, 2, \ldots, \mu$), la condition $\int dt\Omega = \text{Min}$ est équivalente à l'autre, $\int v ds = \text{Max ou Min}$, employée en 1744, dans l'appendice II de la *Methodus inveniendi*. Dans la deuxième, il interprète la somme Ω comme la « quantité d'action de toutes les forces » qui agissent sur un point donné et $\int ds\Omega$ et $\int dt\Omega$ respectivement comme « la somme

(129) Voici comment Euler répond, dans une lettre datée du 8 mai 1748 (cf. n. 118 *supra*), aux objections de Maupertuis :

« ... comme ces deux cas sont bien differents entr'eux, et que la figure d'un fil flexible est très eloignée de celle qu'une masse fluide [Euler assigne la loi du repos à l'équilibre d'une masse fluide; cf. ci-dessous], quoique sollicitée par les memes forces, doit prendre, il n'est pas étrange que ces deux formules ne soient pas precisement les memes; cependant on y remarque dabord un si grand accord, qu'il n'y peut y avoir aucun doute que l'une et l'autre soient fondées sur les memes principes. C'est cette harmonie admirable dont j'ai eu l'honneur de Vous dire que j'ai été frappé, et j'espere qu'après ces eclaircissements Vous ne trouverez plus de difficulté de m'accorder les expressions dont je me suis servi dans ma piece pour remarquer le parfait accord de mes formules avec Votre Theorie. » (Brunet (1938), 70 et Euler (Œuvr.), sér. IV-A, vol. VI, 105.)

(130) Cf. n. 118 *supra*.

de toutes les [quantités d']actions des forces appliquées aux éléments [...] [d'un] fil » et « la somme de toutes les quantités d'actions des forces appliquées aux éléments du temps », ce qui l'amène à justifier par un argument *a priori* le passage de la loi du repos (qu'il entend comme la détermination de la « quantité d'action de toutes les forces ») à la condition d'équilibre d'un fil flexible (où il faut considérer la somme sur toute la longueur du fil des quantités d'action appliquées aux éléments de celui-ci) et à celle du mouvement d'un corps libre attiré par des forces centrales (où il faut considérer la somme des quantités d'action appliquées aux éléments du temps). Finalement, dans la troisième il précise ultérieurement sa terminologie, en reconnaissant l'ambiguïté qui peut surgir en assignant « le nom de quantité d'action à plusieurs formules bien différentes entre elles, sans [...] [avoir] compris comment [...] [on pourrait] justifier cette denomination » (131).

« [Comme] [...] il est clair, écrit-il, que la formule qui sera un *minimum* pour la figure du fil doit être bien differente de celle qui est un *minimum* pour la figure de la masse fluide [...] il s'en suit nécessairement [...] ou que les quantités d'action des forces sur le point M ne sont pas les mêmes, ou que les formules du *minimum* dans ces deux cas n'expriment point la quantité d'action des forces. Je ne voudrois pas soutenir le dernier, puisqu'il me paroit très raisonnable que l'on estime la quantité d'action des forces par la meme formule, qui est un *minimum*, mais il me semble que, pour avoir la quantité d'action, il ne suffit pas d'avoir égard seulement aux forces qui agissent, mais qu'il faut aussi regarder la nature du corps qui en est sollicité. Dans cette vüe, je voudrois nommer cette formule $\int \Lambda_1 d\lambda_1 + \int \Lambda_2 d\lambda_2 + \int \Lambda_3 d\lambda_3 + \&c.$ la quantité d'action absolue des forces sur le point M [...]. il est également clair, si le point M est un élément d'un fil suspendu qui ne sauroit plus obeïr si librement à l'action des forces sollicitantes, que sa courbure ne depend plus uniquement de la quantité d'action absolue, mais qu'il y faut joindre quelque chose qui renferme la nature du fil : je voudrais nommer cela, qui resulte de cette application, la quantité d'action absolue des forces appliquées au cas présent du fil [...].

« De même si le point M marque un corps projetté d'une maniere quelconque [...] la quantité d'action appliquée à ce cas [...] sera $\int dt \left[\int \Lambda_1 d\lambda_1 + \int \Lambda_2 d\lambda_2 + \int \Lambda_3 d\lambda_3 + \&c. \right]$ (132). »

(131) Cf. Brunet (1938), 73 et Euler (Œuvr.), sér. IV-A, vol. VI, 115.
(132) Cf. *ibid.*, respectivement 74-75 et 116.

Ce passage contient pour l'essentiel les conclusions du deuxième des mémoires cités, dont le but déclaré est « de découvrir les raisonnemens, qui nous puissent conduire *a priori* à la [...] connoissance » du minimum qu'on retrouve dans l'équilibre d'un fil flexible, ou bien de « rechercher les principes, desquels on pourroit conclure ce minimum, quand même on ne connoitroit pas encore la courbe, que le fil prend actuellement » (133).

En vue de cette tâche, Euler croit bon de commencer par « la même considération, dont Mr. de *Maupertuis* s'est servi pour établir sa loi générale du repos », afin d'éclairer la notion générale de « quantité d'action des forces », chose qui « est de la derniere importance dans toutes les actions des forces, soit que les corps, qui en sont sollicités demeurent en équilibre, ou qu'ils soient mis en mouvement » (134). Le système quelconque de plusieurs corps attirés par des forces centrales est toutefois remplacé ici par le cas particulier d'une masse fluide dont « toutes les particules » sont attirées vers des centres fixes par des forces proportionnelles à la distance du centre et dont il s'agit de déterminer la figure dans une configuration d'équilibre (135).

La démarche suivie par Euler au cours de cette recherche est la même que dans les cas précédents : il résout le problème par une méthode directe et il cherche ensuite la formule qu'on peut considérer comme un maximum ou un minimum dans l'équation trouvée. Pour cela, il pose comme condition d'équilibre d'une masse fluide dont toutes les particules sont attirées par des forces quelconques que la force totale agissant sur une particule quelconque ait une direction perpendiculaire à la surface de la masse (136). En rapportant cette surface à un système de coordonnées orthogonales, il en conclut qu'elle doit être exprimée par l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0,$$

où X, Y et Z sont les composantes orthogonales de la force totale Λ qui agit sur le point M de coordonnées x, y et z (137). Pour que

(133) Cf. Euler (1748b), 190.
(134) Cf. *ibid.*
(135) Cf. *ibid.*, 191-204.
(136) Cf. *ibid.*, 196.
(137) Cf. *ibid.*, 191-196.

cette équation puisse représenter la figure de la masse fluide, elle doit toutefois être intégrable, ce qui dépend de la nature fonctionnelle des forces X, Y et Z. Le cas le plus simple où ceci est vérifié est celui où les forces X, Y et Z sont respectivement des fonctions des seules coordonnées x, y et z, ce qui est certainement vrai si chaque point de la masse n'est attiré vers des centres fixes que par des forces proportionnelles à la distance de ce point à leur centre respectif. Or, si sur le point M agit un nombre quelconque de forces Λ_j ($j = 1, 2, \ldots, \mu$) d'une telle nature, leurs composantes orthogonales X, Y et Z seront respectivement égales aux sommes $-\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Lambda_j x_j}{\lambda_j}$, $-\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Lambda_j y_j}{\lambda_j}$ et $-\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\Lambda_j z_j}{\lambda_j}$, λ_j étant la distance du point M au centre de la force Λ_j et x_j, y_j et z_j les coordonnées de ce même centre, ce qui donne la relation $\lambda_j^2 = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}$ ou bien $\lambda_j \mathrm{d}\lambda_j = x_j \mathrm{d}x_j + y_j \mathrm{d}y_j + z_j \mathrm{d}z_j$. En substituant dans (P) on a alors aisément

$$\text{(Q)} \qquad \sum_{j=1}^{\mu} \Lambda_j \mathrm{d}\lambda_j = 0, \quad \text{ou bien} \quad \sum_{j=1}^{\mu} \int \Lambda_j \mathrm{d}\lambda_j [= \Omega] = \mathrm{K}$$

(K étant une constante), qui exprime la figure cherchée. Voici le commentaire d'Euler :

> « ... puisque l'état d'équilibre exige de toutes parts une égalité d'action, il est d'abord clair que cette même formule [Ω] nous exprimera la quantité d'action, qui par son égalité se contrebalance de tous cotés; et on ne sauroit douter, que cette formule [...] ne fût la vraie mesure de la quantité d'action des forces, qui agissent sur la masse fluide, quand même on n'auroit d'autres raisons, par lesquelles on seroit en état de determiner cette mesure (138). »

Bien que la référence à l'égalité de l'action « de tous côtés » semble renvoyer à une interprétation physique de celle-ci en tant qu'entité agissant effectivement dans la nature, le procédé mathématique est lui-même transparent, l'action n'étant, encore une fois, que la formule extrémale qu'on peut reconnaître dans l'équation de la solution trouvée par les méthodes directes. Or, l'équilibre d'une masse fluide ne dépendant que des forces qui agissent sur chaque particule, on pourra interpréter la quantité d'action ainsi

(138) Cf. *ibid.*, 202-203.

déterminée comme « la quantité d'action des forces qui agissent sur un point quelconque M » (tout à fait indépendamment de la référence à la masse fluide).

Pour passer de cette conclusion à la loi du repos, ainsi que Maupertuis l'a formulée, il faut démontrer encore que Ω n'est pas seulement constante dans l'équilibre de la masse fluide, mais qu'elle est plus précisément un minimum. Pour cela, on peut se limiter toutefois au cas particulier où la masse fluide est réduite à un seul point, car « si cette conclusion n'étoit pas juste dans le cas d'une masse fluide, elle ne le seroit pas non plus dans le cas, où la masse fluide est réduite à un seul point » (139). Cette restriction revient d'ailleurs à assimiler la loi du repos à la condition qui affirme qu'un point matériel est en équilibre dans un champ central, où les forces Λ_j sont respectivement proportionnelles aux distances λ_j entre leur point d'application et leur centre, si la somme Ω est un minimum, ce qu'on sait n'être une condition nécessaire que de l'équilibre stable. Euler ne semble toutefois pas saisir la difficulté et présente une preuve de ce principe « fondée sur quelque principe tiré de la Métaphysique (140) ».

Soit le point M attaché à μ verges rigides $MC_1, \ldots, MC_\mu$, qui sont tirées vers des parois fixes $E_1F_1, \ldots, E_\mu F_\mu$ par des fils élastiques parfaitement égaux entre eux — la figure 6 présente le cas où $\mu = 3$ (141). La force de chaque fil étant prise comme unitaire, soient respectivement $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\mu$ les nombres de fils attachés aux trois verges, de sorte que les mêmes constantes expriment les forces qui sollicitent le point M dans les directions des verges (142). « Cela posé il est clair que ces forces n'agissent qu'entant que les fils élastiques tachent de se raccourcir », de sorte que M ne sera en repos que quand « il sera impossible, que la contraction de tous ces fils ensemble se puisse augmenter davantage » (143), ou bien quand la somme des longueurs des fils sera la plus petite. Si l'on note $\sigma_1, \ldots, \sigma_\mu$ les distances variables $A_1G_1, \ldots, A_\mu G_\mu$, ceci signifie

(139) Cf. *ibid.*, 204. Si $\neg$ A $\Rightarrow$ $\neg$ B, il est évidemment suffisant de démontrer B pour en conclure A, [$\neg$ A $\Rightarrow$ $\neg$ B $\Leftrightarrow$ B $\Rightarrow$ A] étant une tautologie.

(140) Cf. *ibid.*, 205-208.

(141) C'est effectivement à ce cas que se limite Euler, dont le raisonnement est toutefois très aisément généralisable.

(142) Cf. n. 183 *infra*.

(143) Cf. Euler (1748b), 205.

que le point M sera en équilibre quand la somme $\sum_{j=1}^{\mu} \Lambda_j \sigma_j$ sera un minimum. De là il est clair, poursuit Euler, que la condition d'équilibre connue dans le cas où les forces sont constantes, $\sum_{j=1}^{\mu} \Lambda_j d\lambda_j = 0$ (λ_j, où $j = 1, \ldots, \mu$, étant les distances du point M à des points fixes placés sur la direction des verges), dérive de la susdite condition de minimum. Il s'agit alors de passer au cas des forces variables (144). Voici l'argument simple d'Euler :

« [...] si les forces Λ_1, Λ_2, Λ_3 (145), sont des fonctions quelconques de[s] [...] distances λ_1, λ_2, λ_3, l'état d'équilibre du point M donnera la même équation différentielle $\Lambda_1 d\lambda_1 + \Lambda_2 d\lambda_2 + \Lambda_3 d\lambda_3 = 0$ [...] et à présent il n'y a aucun doute que son intégrale $\int \Lambda_1 d\lambda_1 + \int \Lambda_2 d\lambda_2 + \int \Lambda_3 d\lambda_3$ ne soit aussi un *minimum* (146). »

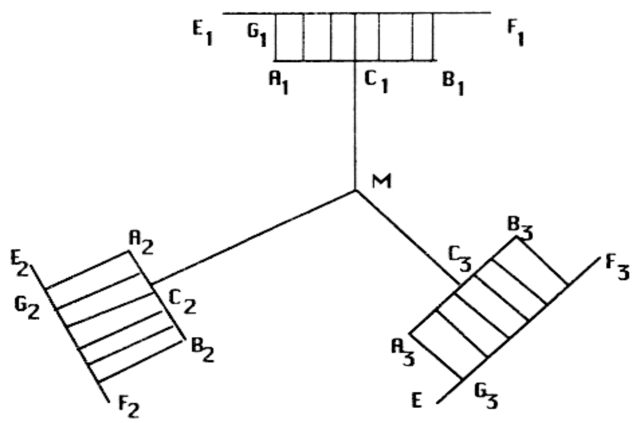

Fig. 6.

Bien que l'argument d'Euler ne soit acceptable qu'à la condition de limiter l'équilibre au seul équilibre stable, et qu'il ne prouve

(144) Avant de passer au cas des forces variables, Euler démontre en vérité le principe fondamental de la statique sous la forme la plus classique : le point M est en équilibre si les forces $\Lambda_1, \ldots, \Lambda\mu$ sont entre elles comme les sinus des angles opposés. A cette fin, il imagine que le point M soit « transporté par l'éspace infiniment petit M*m* » et il écrit :

« ... comme un tel changement se peut faire d'une infinité de manieres, j'en choisirai celui où le point *m* est également éloigné de A_1B_1, que le point M. » (*Ibid.*, 206.)

Il n'est pas difficile, je crois, de voir ici une idée assez proche de celle de variation de Lagrange.

(145) Cf. n. 140 *supra*.

(146) Cf. Euler (1748b), 207.

donc nullement que la condition de minimum de Ω soit une condition nécessaire d'équilibre (il prouve au plus qu'elle est une condition nécessaire de l'équilibre stable), il n'est pas difficile de le corriger localement en le traduisant soit en un argument métaphysique à l'appui du principe qui affirme que cette même condition est une condition suffisante d'équilibre, soit en un autre argument de même nature à l'appui du principe qui affirme que la condition d'extrémalité de Ω est une condition nécessaire et suffisante d'équilibre. Au-delà de ses interprétations, Euler a ainsi fourni une preuve métaphysique de la loi du repos, dans sa version correcte, certainement meilleure que celles dont on disposait auparavant. Un tel avantage n'est d'ailleurs que la conséquence de la nouvelle conception de la métaphysique comme réflexion intra-mathématique, qui semble désormais s'être imposée.

Si les résultats précédents peuvent être interprétés comme l'établissement du principe fondamental de la statique — ainsi que de l'hydrostatique —, ils peuvent aussi être vus comme la mise en lumière du rôle essentiel joué dans ces sciences par ce qu'on a appelé la « quantité d'action des forces sur un point », *ou bien* par la formule Ω. De cette manière, on n'a toutefois montré qu'une partie des usages que cette même formule a dans toute la mécanique. Il s'agit encore de voir si, à partir des résultats acquis, on peut parvenir, par des arguments *a priori,* à justifier les autres applications connues. De cette manière, on ne produira qu'une exposition organique (même si elle n'est pas déductive) des principes de la mécanique, mais on pourra, pour ainsi dire, mettre à l'épreuve une certaine interprétation physique de la formule Ω (147).

En premier lieu, on peut observer (148) que la condition d'équilibre d'une masse fluide donnée ci-dessus ne tient compte que de l'action exercée sur un point arbitraire de cette masse. En considé-

(147) En n'abordant qu'à la fin de son parcours la tâche qui consiste à construire des arguments *a priori* portant sur la notion d'action, Euler nous fournit un des premiers exemples d'une démarche typique de la mécanique moderne, qui va du formalisme mathématique à son interprétation physique, plutôt que d'un concept physique à sa traduction formelle.

(148) Je modifie ici l'ordre d'exposition d'Euler en ne revenant qu'à la fin de la présente partie à sa démonstration de la conservation des forces vives qui est par contre insérée tout de suite après l'argument métaphysique qu'on vient de reconstruire (cf. *ibid.*, 209-210).

rant (149) par contre une particule dS de cette dernière comme « un assemblage de plusieurs points », on n'aura aucune difficulté à conclure des résultats précédents que la « quantité d'action [des forces] sur l'élément dS » est égale au produit ΩdS. La « quantité d'action des forces sur toute la masse fluide » sera ainsi donnée par l'intégrale $\int \Omega dS$. Or, poursuit Euler, comme la figure de cette masse en équilibre est donnée par le minimum de Ω, elle doit être donnée ainsi par le minimum de l'intégrale $\int \Omega dS$ qu'on vient de découvrir (150). Si la masse considérée est infiniment petite, et coïncide donc avec la particule dS, on pourra éliminer le signe d'intégrale et, en faisant dS constante, revenir aisément à la condition de Maupertuis. Si la masse est finie, l'accord entre les deux conditions est par contre très difficile à montrer et Euler se limite au cas d'une « masse fluide infiniment mince, couchée sur un plan », qu'on peut traiter comme une véritable surface plane. Il trouve alors que « la quantité d'action des forces sur un élément de l'aire » est égale, par rapport à un système de coordonnées orthogonales x, y, à l'intégrale $dx \int dy\Omega$, de sorte que l'autre intégrale, $\int dx \int dy\Omega$, représentera « la quantité d'action sur toute l'aire » et devra ainsi être considérée dans l'équilibre comme un minimum. La méthode des maxima et minima nous permet d'ailleurs de convertir une telle condition en l'équation $\Omega - K = 0$, déjà trouvée ci-dessus pour une masse fluide quelconque, ce qui « ne laissera pas le moindre doute » sur le fait que ce même accord aura lieu « dans tous les autres cas » aussi (151).

(149) Cf. *ibid.*, 211-212.

(150) Euler semble penser que « la quantité d'action des forces sur la masse fluide » doit être telle que l'équilibre de la masse corresponde à une valeur constante de celle-ci et parvenir à la conclusion énoncée au moyen de la double implication

$$\int \Omega dS = K \Rightarrow d[\Omega dS] = 0 \Rightarrow \int \Omega dS = \text{Min},$$

où la première assertion dérive d'une intuition physique fondée sur une interprétation implicite de la notion d'action et la deuxième implication porte sur la preuve métaphysique précédente de la loi du repos.

(151) Cf. *ibid.*, 214.

Si l'on considère en deuxième lieu (152) un fil flexible sollicité par des forces centrales dirigées vers des points fixes, on n'aura aucune peine à raisonner comme dans le cas d'une surface, pour conclure que le produit Ωds, ds étant une particule du fil, exprime la « quantité d'action des forces sur l'élément ds » et l'intégrale $\int \Omega ds$ cette même quantité d'action sur la portion du fil terminée par le point par rapport auquel on a déterminé Ω. Pour parvenir à la condition trouvée dans le mémoire précédent, on n'a ainsi qu'à poser cette même quantité comme un minimum (153).

En dernier lieu (154), si l'on considère un corps en mouvement attiré par les forces centrales Λ_j ($j = 1, \ldots, \mu$), on devra prendre Ω comme la quantité d'action de ces forces sur le corps « au moment qu'il se trouve » dans un point quelconque M de sa trajectoire — la masse du corps est ici considérée comme unitaire (155). Comme le mouvement du corps a lieu dans le temps, on devra considérer d'abord la « quantité d'action instantanée » pendant l'élément de temps dt, qui sera donnée à son tour par le produit Ωdt, de sorte que la condition $\int \Omega dt = \text{Min}$ donnera la trajectoire décrite par le corps pendant un temps t fini. Cette condition est d'ailleurs équivalente à l'autre, $\int v ds = \text{Max}$, déjà utilisée (156) en 1744. Car (157), les forces Λ_j ($j = 1, \ldots, \mu$) agissant sur le corps, ce même corps sera sollicité au point M de coordonnées x, y par une force tangentielle à sa trajectoire égale à

(152) Cf. *ibid.*, 214-217.

(153) J'omets ici, comme je l'ai fait déjà pour le mémoire précédent, de considérer le cas d'un fil élastique.

(154) Cf. *ibid.*, 217-218.

(155) On parvient évidemment au même résultat en substituant au corps un point matériel ou en prenant les Λ_j comme des forces motrices et non, comme on l'a fait jusqu'ici, comme les forces accélératrices : le texte d'Euler demeure ambigu à cet égard.

(156) Euler ne remarque pas qu'en 1744 il avait posé, en vérité, $\int v ds = \text{Min}$. Si la différence est mathématiquement insignifiante, elle conduit à des conséquences très lourdes relativement à la validité des arguments métaphysiques (cf. ci-dessous).

(157) Cf. *ibid.*, 209-210 et 218; cf. n. 148 *supra*.

$-\dfrac{\sum_{j=1}^{\mu} \Lambda_j \lambda_j}{ds}$, de sorte que, v étant la vitesse ponctuelle du corps, on aura $-\sum_{j=1}^{\mu} \Lambda_j \lambda_j = \dfrac{dv}{dt} ds = v dv$ et ainsi, en intégrant, $W - \Omega = \dfrac{1}{2} v^2$ (W étant une constante), ou bien (158) :

$$\int \Omega dt = \int \frac{dt}{2}(2W - v^2) = Wt - \frac{1}{2}\int v^2 dt = Wt - \frac{1}{2}\int v ds .$$

VIII. — Du principe du repos au principe du mouvement : encore deux mémoires d'Euler, de 1751

Les deux mémoires d'Euler de 1748 portent ainsi, essentiellement, sur l'usage de la formule $\Omega = \sum_{j=1}^{\mu} \int \Lambda_j d\lambda_j$, tirée du mémoire de Maupertuis de 1740 sur la loi du repos, dans la solution des problèmes les plus classiques et fondamentaux de la mécanique. La statique, l'hydrostatique, la dynamique d'un corps isolé et la statique des fils reçoivent ainsi une fondation unitaire dans le cadre de la nouvelle théorie des maxima et minima qui leur fournit un langage mathématique commun. Ce résultat, certainement extraordinaire, n'est toutefois fondé, sur le plan strictement mathématique, que sur des justifications *a posteriori* découlant de l'analyse des différents résultats obtenus par les méthodes directes; le passage à des justifications *a priori* demande encore des arguments qui

(158) Comme Fraser l'a bien remarqué (cf. Fraser (1983), 202-203, qui se réfère, en vérité, à la présentation de la même démonstration en Euler (1751a); cf. n. 174 *infra*), on retrouve ici une preuve (mathématique *a priori* complète) de la conservation des forces vives (pour l'extension de cette preuve au mouvement de plusieurs corps agissant les uns sur les autres, cf. la partie VIII). La même démonstration nous dit aussi, comme le souligne Euler lui-même (cf. *ibid.*, 209), que Ω est, dans le mouvement d'un corps matériel libre, le composant de la force vive (ou, comme on dit aujourd'hui, de l'énergie cinétique) qui ne dépend que de la position du point, et, interprétée en termes modernes, que le lagrangien $L = \Omega$ d'un point matériel libre est égal à l'énergie cinétique diminuée d'une constante, qui, ne dépendant que des conditions initiales, peut être éliminée dans l'équation du mouvement (cf. Euler (1751a), 178).

relèvent d'une métaphysique qui, bien que désormais tout à fait intramathématique et apte à exprimer des intuitions profondes, reste loin de l'idéal d'une justification évidente, irrécusable et explicative. En particulier, les liens entre le principe de l'équilibre d'un système de corps et le principe du mouvement d'un corps libre (ou bien entre statique et dynamique) n'apparaissent pas d'une manière claire, ni du côté des déductions formelles, ni du côté des interprétations physiques, le contenu physique même des deux principes restant d'ailleurs assez nébuleux. Une tentative de clarification s'impose.

Voilà la tâche que se fixe Euler dans deux nouveaux mémoires (159) parus dans le recueil de l'Académie de Berlin pour l'année 1751, mémoires qui constituent d'ailleurs le dernier acte de l'aventure intellectuelle dont je me propose ici de fournir une reconstruction (160).

Le premier de ces mémoires a déjà été analysé, pour l'essentiel de son contenu, par Fraser (161), qui y voit « *a nice summary of Euler's ideas on variational methods in mechanics* » et « *a probable source of inspiration for Lagrange* » (162). Bien que le ton de nombreux passages se ressente, comme l'a remarqué Fraser, de l'affaire König — quelques mois auparavant, celui-ci avait adressé

(159) Cf. Euler (1751a) et (1751b).

(160) Il ne s'agit pas, au contraire, du dernier acte de la discussion scientifique et philosophique sur le principe de moindre action avant Lagrange; celle-ci était bien plus large et engageait depuis 1749 un grand nombre des mathématiciens dans une querelle fameuse où les thèmes de la priorité et des liens entre ce principe et la théorie leibnizienne des forces vives se mêlaient à des conceptions différentes de la mécanique et de ses rapports avec la métaphysique. Le fait que cette polémique soit désormais relativement bien connue et qu'elle ait été l'objet de nombreuses recherches philosophiques (cf., par exemple, Brunet (1929), 128-158 et (1938), 8-26; Guéroult (1934), 215-235; Dugas (1950), 256-262; Fleckenstein (1957), XXV-XLVI; et Montucla (1799-1802), vol. III, 648-654) et le sentiment qu'elle reste très en-deçà de la profondeur mathématique et philosophique des contributions d'Euler discutées ici m'ont décidé à ne pas y revenir. En me limitant aux textes où la discussion porte sur quelques contenus mathématiques, je citerai de toute façon ici : Courtivron (1748-1749); d'Arcy (1749) et (1752); König (1751); Euler (1751a) (dont une traduction française est parue tant sous la forme de pamphlet — cf. Euler (1753b) — que parmi les *Mémoires de l'Académie de Berlin* — cf. Euler (1751c) et (1751d) —); Martens (1752); Maupertuis (1752) (il s'agit d'une réponse au premier mémoire de d'Arcy; cf. n. 113 *supra*); d'Alembert (Act.), (Cosm.) et (For.); Bertrand (1753). Une preuve de la persistance des thèmes abordés dans cette discussion peut être trouvée dans la tardive exposition par Lambert du principe de moindre action (cf. Lambert (1765-1772), vol. II, 543-555).

(161) Cf. Fraser (1983), 200-203. Pour des raisons de cohérence dans mon travail, je reprendrai ici certaines remarques déjà faites dans cet article.

(162) Cf. *ibid.*, 200.

de féroces critiques à Maupertuis, qui était alors président de l'Académie de Berlin et qu'Euler, en tant que directeur de la même Académie, ne pouvait s'abstenir de défendre (163) —, cette querelle est pour Euler l'occasion de revenir à ses anciennes réflexions (164), en les poursuivant tout à fait indépendamment de cette polémique, d'ailleurs largement stérile (165). La stratégie de défense choisie ici par Euler n'est d'ailleurs certainement pas la plus naturelle et laisse largement transparaître la différence profonde entre sa propre approche et celle de Maupertuis.

« M. *de Maupertuis,* notre très digne Président, écrit Euler tout au début de son mémoire, ayant découvert deux principes généraux, l'un pour l'état du repos ou de l'équilibre, et l'autre pour celui du mouvement, il semble d'abord que ces deux principes n'ont rien de commun, puisqu'ils sont fondés sur des élémens tout à fait differens entr'eux. Cependant je ferai voir, que l'un et l'autre de ces deux principes est soutenu sur le même fondement, et qu'ils se trouvent dans la plus étroite liaison, de sorte que dès qu'on tombe d'accord sur l'un, on ne sauroit plus revoquer en doute l'autre : ou bien, l'un étant suffisamment constaté, tiendra lieu d'une démonstration rigoureuse de l'autre. Cette belle harmonie me paroit d'autant plus importante, qu'elle est capable de mettre dans tout son jour, tant l'un que l'autre de ces deux principes : et on conviendra aisément, que plus ces deux principes sont unis entr'eux, et plus ils seront conformes à la simplicité de la Nature.

« [...] Donc, puisque le premier principe n'est assujetti à aucune opposition, et qu'après l'Auteur j'en ai aussi démontré la vérité par une infinité de cas entièrement differens entr'eux; cette harmonie seule suffira à réfuter toutes les objections, qu'on pourroit faire contre l'autre principe du mouvement (166). »

Au lieu de défendre, dans tout son pouvoir et son originalité, le principe de moindre action, ainsi que Maupertuis l'avait conçu, Euler se propose ainsi de montrer que, dans son interprétation restreinte du principe du mouvement d'un système de corps, ce principe — une fois qu'il est correctement formulé, comme Euler lui-même l'avait fait en 1744 et 1748 en se détachant de la formu-

(163) Le mémoire d'Euler fut présenté à l'Académie de Berlin en novembre 1751, tandis que celui de König parut dans le numéro de mars de la même année des *Acta Eruditorum.*

(164) Une première version du mémoire fut d'ailleurs probablement rédigée par Euler en 1748 (cf. Costabel (1986), 18).

(165) Dans la note (160) ci-dessus, j'ai cité par contre trois autres mémoires d'Euler qu'on ne saurait attribuer qu'aux raisons propres à la polémique et à ses contenus politiques.

(166) Cf. Euler (1751a), 169-170.

lation générique de Maupertuis — n'est rien qu'une conséquence de la loi du repos, envisagée, elle, d'une manière bien plus générale que Maupertuis ne l'avait fait. De cette manière, si le principe de moindre action, en tant que principe du mouvement, est mis à l'abri de toute critique qui s'adresserait aussi à la loi du repos (et donc au principe des travaux virtuels), il perd son rôle central dans l'édifice de la mécanique. De plus, l'argument d'Euler est tel que, même si l'on admet toutes ses conclusions, rien n'est prouvé contre les accusations de König et d'autres (167) envers Maupertuis : la formulation de ce dernier peut continuer à être assimilée à celle, fantomatique, de Leibniz, et surtout à être qualifiée d'imprécise, voire d'erronée.

Cela dit, venons-en à l'analyse des arguments d'Euler. Bien que Maupertuis ait donné, en 1740, sa loi du repos sous une forme qui ne convient qu'aux systèmes où agissent des forces centrales proportionnelles à une puissance quelconque de la distance à leur point d'application, rien n'empêche, d'après Euler, de généraliser le principe.

> « Car si chacun des corps, dont la masse soit = M, et la distance à un centre des forces = λ, y est attiré par une force quelconque accélératrice = Λ, au lieu de $A\lambda^n$; on verra par le même raisonnement, que dans l'état d'équilibre la somme de toutes les formules $M\Lambda d\lambda$ sera égale à zéro (168). Et partant la somme de leurs intégrales $\int M\Lambda d\lambda$ sera un *maximum* et un *minimum* (169). »

Si l'on note ainsi par $\Lambda_{\alpha,\beta}$ l'α-ième force agissant sur le β-ième corps du système dont la masse est M_β ($1 \leq \alpha \leq \mu$; $1 \leq \beta \leq m$), la condition variationnelle d'équilibre d'un système de corps sur lesquels agissent des forces centrales peut s'écrire sous la forme :

$$\text{(R)} \qquad \sum_{i=1}^{m} M_i\left[\sum_{j=1}^{\mu}\int \Lambda_{j,i}d\lambda_{j,i}\right] = \left[\sum_{i=1}^{m} M_i\Omega_i = \sum_{i=1}^{m} M_i\int\Theta_i\right] \text{Max ou Min}$$

où, en changeant encore une fois sa terminologie, Euler nomme

(167) Cf. n. 113 et 163 *supra*.
(168) Cf. la partie II ci-dessus.
(169) Cf. Euler (1751a), 172.

$M_i\Omega_i$ l' « effort des forces Λ_j ($j = 1, ..., \mu$) sur le corps de masse M_i (170) ».

Etant parvenu à la loi du repos généralisée par la même démarche déductive que Maupertuis, Euler ne peut se limiter à présenter le principe comme une condition de minimum. Il ne fait toutefois qu'envisager la possibilité d'un maximum, en ajoutant tout de suite qu'une telle éventualité ne convient qu'à un équilibre instable : « ... dans tous les autres cas, où l'équilibre est permanent, c'est le plus petit qui a lieu (171). » Bien qu'Euler parvienne ici à une distinction fondamentale de la statique, il ouvre les portes à une objection triviale contre tous les arguments métaphysiques qui ramènent la loi du repos à une tendance de la nature à l'épargne. Cette difficulté serait encore plus manifeste dans le cas du mouvement, qui est abordé par Euler dans les considérations suivantes :

« Ayant établi ce principe pour le repos, ou l'équilibre, qu'y a-t-il de plus naturel que de soutenir, que ce même principe ait aussi lieu dans le mouvement des corps, sollicités par de semblables forces? Car si l'intention de la Nature est d'épargner le plus qu'il est possible sur la somme des efforts, il faut qu'elle s'étende aussi au mouvement, pourvu qu'on prenne les efforts, non seulement comme ils subsistent dans un instant, mais dans tous les instants ensemble, que dure le mouvement. Ainsi l'effort, ou la somme des efforts, étant pour un instant quelconque de mouvement $= [M]\Omega$ (172), et posant l'élément du tems $= dt$, il faut que cette formule intégrale $[M]\int \Omega dt$ soit un *minimum*. De sorte que si pour le cas de l'équilibre la quantité $[M]\Omega$ doit être un *minimum,* les memes loix de la Nature semblent exiger, que pour le mouvement cette formule $[M]\int \Omega dt$ soit la plus petite (173). »

Le caractère vicieux d'un tel argument (métaphysique) est évident, l'accord qu'il veut démontrer étant la prémisse même du

(170) Ce changement ultérieur de terminologie est probablement dû, outre à une exigence de clarté, à la volonté — bien pressante au beau milieu d'une polémique aussi féroce — de garder le terme « action » pour se référer à une formule qui intervient dans la détermination des mouvements des corps, ainsi que Maupertuis l'avait fait.

(171) Cf. *ibid.*, 174.

(172) Cf. n. 155 *supra*; il est clair qu'Euler traite ici les forces $\Lambda_j (j = 1, ..., \mu)$ comme des forces motrices (la référence est évidemment au mouvement d'un corps isolé). J'ai préféré toutefois introduire le facteur M, pour des raisons d'uniformité de notation.

(173) Cf. Euler (1751a), 175.

raisonnement. L' « harmonie » qu'Euler veut établir demande ainsi à être justifiée par une preuve différente. Pour cela, Euler ne peut toutefois qu'avoir recours à un argument *a posteriori*. La même démonstration qu'en 1748 lui permet, en effet, de parvenir à l'identité entre « l'effort » MΩ sur un corps de masse M et la force vive de ce même corps, prise négativement et augmentée d'une constante (174). De là on peut conclure que les deux conditions $M\int v ds = \text{Max}$ et $M\int \Omega dt = \text{Min}$ sont équivalentes entre elles. Mais comme la première de ces conditions fournit les mêmes courbes « qu'on découvre par les principes ordinaires de la Mécanique », de là « on voit clairement, que ce principe de mouvement de M. de Maupertuis est une conséquence nécessaire de son principe général de repos ou d'équilibre » (175). D'ailleurs, $Mvds$ étant le produit de la masse du corps par sa vitesse et par l'espace parcouru dans un instant, l'intégrale $M\int v ds$ peut être envisagée comme la « quantité d'action [...] selon la manière de parler de M. de *Maupertuis* (176) » (qui est ainsi clairement précisée).

L'espérance d'une justification acceptable *a priori* du principe variationnel de la dynamique à partir de l'acceptation de la loi du repos, qu'Euler avait fait naître par ses déclarations initiales, est ainsi largement déçue (177). De plus, la partie déductive de l'argument précédent montre qu'à un minimum de $M\int \Omega dt$ ne correspond qu'un maximum de $M\int v ds$, de sorte qu'en interprétant cette dernière intégrale comme (l'expression de) l'action et en acceptant l'argument métaphysique proposé, on se trouve dans la nécessité

(174) Cf. *ibid.*, 176-177. En s'appuyant sur sa nouvelle formulation rigoureuse du deuxième principe de Newton, $2Md^2s = \pm Fdt^2$ (F étant la force motrice) — cf. Euler (1750), 195 —, Euler peut éviter de prendre en considération le facteur 1/2.

(175) Cf. Euler (1751a), 176.

(176) Cf. *ibid.*, 175-176; cf. la partie VI *supra*.

(177) D'ailleurs, même si l'on accepte comme valable l'argument *a posteriori*, on se trouve dans une situation paradoxale : une preuve en faveur du principe du mouvement est employée comme justification de la correspondance entre le même principe et la loi du repos qui, dans l'esprit d'Euler, aurait dû viser à garantir le principe du mouvement lui-même. Le cercle vicieux (ou, si l'on préfère s'exprimer différemment, la *petitio principi*) semble donc inévitable.

d'admettre qu'à un minimum de l'effort dans l'équilibre correspond un maximum de l'action dans le mouvement et *vice versa,* à un minimum de l'action dans le mouvement correspond un maximum de l'effort dans l'équilibre. Voici comment Euler cherche à résoudre la difficulté.

« Quoique la difference entre un *maximum* et un *minimum* paroisse bien grande, elle n'est pourtant d'aucune conséquence dans la Nature même, puisque les *maximum* et *minimum* ne different entr'eux que par rapport aux signes, de sorte que là, où une quantité quelconque Z est un *maximum,* la même quantité prise négativement $-Z$ est en même tems un *minimum.* C'est aussi la raison pourquoi la méthode pour trouver tant les *maximum* que les *minimum* est absolument la même. Ainsi qui voudroit attaquer de ce côté l'identité decouverte entre la force vive Mv^2 et l'effort $[M]\Omega$, ne feroit que de pures chicanes (178). »

Ce n'est pas toutefois l'identité en question qui peut être attaquée de cette façon, mais la légitimité des arguments métaphysiques (tant en faveur des deux principes que de leur équivalence) fondés sur la tendance généralisée de la nature à l'épargne. Car l'idée que la nature puisse vouloir *épargner* l'effort ou l'action pris négativement se révèle très vite insoutenable. Le mélange autrement heureux de mathématiques et de métaphysique sur lequel porte tout le programme d'Euler montre ici une évidente faiblesse. L'exigence d'une lecture complètement mathématique des principes variationnels qui écarte toute considération ontologique surgit de l'intérieur même de ce programme (179).

Ayant, selon lui, établi la correspondance entre la loi du repos et le principe de moindre action relativement à un corps isolé, Euler doit de toute façon encore montrer que la même correspondance a lieu aussi relativement à un système de plusieurs corps. Dans ce but, il ne considère toutefois que l'exemple d'un système de deux corps liés entre eux par une verge et attirés vers un centre commun et montre comment on peut y retrouver la même identité entre effort et force vive, en prétendant « que la même démons-

(178) Cf. *ibid.,* 178.

(179) Cette considération n'entraîne aucun jugement négatif sur le rôle des considérations métaphysiques dans le programme d'Euler, l'exigence de leur élimination ne surgissant qu'à un stade d'évolution du programme qu'elles ont largement contribué à faire atteindre.

tration s'étend, tant à autant de corps liés ensemble qu'à autant de centres de forces qu'on voudra (180) ».

La dernière partie du mémoire (181) enfin est consacrée à montrer comment de la loi du repos on peut dériver tous les autres principes connus de la statique. Après avoir démontré la décomposition des forces, le critère géométrique de l'équilibre des forces agissant sur un point donné (les forces étant proportionnelles à la distance de celui-ci à leur centre (182)) et les propriétés principales du levier, Euler propose un argument d'ordre général. Soit une machine quelconque employée à vaincre la résistance Q au moyen de la force P et soient respectivement p et q des distances prises entre les points d'application de ces forces et deux points fixes placés dans leur direction. La loi du repos nous dira que la machine remplit sa fonction si $\int Pdp + \int Qdq = \text{Min}$ et donc si $Pdp + Qdq = 0$. Il suffit de présupposer que, une force tendant à augmenter la distance p, l'autre tend à diminuer la distance q, pour avoir ainsi le principe général des machines, dont la certitude, nous dit Euler, peut être tirée ainsi de la loi du repos elle-même.

L'argument est évidemment spécieux, surtout si on l'accompagne d'une justification de cette dernière loi, qu'on déduit suivant la démarche de Maupertuis, du principe des travaux virtuels, dont le principe général des machines n'est que le cas particulier résultant de la prise en considération d'un système de deux forces seulement (183). Loin de confirmer la puissance de la loi du repos, le raisonnement précédent risque donc de remettre en question autant son originalité que son rôle d'élément premier de la statique. C'est d'ailleurs le même Euler qui évoque une telle difficulté :

« Mais peut-être, écrit-il, me voudroit-on objecter, que le principe général d'équilibre n'est pas réellement different de ce principe général

(180) Cf. *ibid.,* 179-181 ; la citation est à la page 179.

(181) Cf. *ibid.,* 183-198.

(182) Une droite passant par le point étant tirée, il s'agit de montrer que la somme des distances des centres des forces à cette droite est nulle (en prenant les distances des deux côtés de la droite avec un signe inverse).

(183) Il est, en effet, bien clair que tout système matériel peut être réduit à une machine employée à vaincre une force. La preuve lagrangienne du principe des travaux virtuels sera d'ailleurs fondée, dans la deuxième édition de la *Mécanique analytique* (cf. n. 37 *supra*), sur une semblable réduction.

de toutes les Machines; et puisque celui-ci est depuis longtems connu, on révoquera sous ce prétexte en doute la nouveauté de celui-là (184). »

Pourtant, sa réponse, prise à la lettre, n'est guère satisfaisante; elle consiste seulement à souligner les différences entre la loi du repos et le principe général des machines en tant que tel, sans aucune référence au véritable objet du problème, le principe des travaux virtuels de Bernoulli-Varignon. Une lecture plus attentive indique toutefois comment l'intuition d'Euler lui a permis de saisir le cœur de la question. Après avoir observé en passant que le principe des machines ne porte que sur une égalité, tandis que la loi du repos, elle, demande la prise en considération d'un minimum, il écrit :

« Mais outre cela on est absolument obligé d'avouër, que ce principe des Machines est fort borné, quelque général qu'il puisse paroitre d'ailleurs, n'étant applicable qu'à des Machines, où il s'agit de l'équilibre entre deux forces, l'une mouvante, et l'autre résistante : et personne ne s'est encore avisé de déduire de ce principe les courbures des corps flexibles, comme celle de la Catenaire, et encore moins des corps élastiques, sans rien dire de la figure des corps fluides, qu'ils doivent prendre étant sollicités par des forces quelconques (185). »

Voici alors ce qui fait la différence essentielle entre la loi du repos et le principe de Bernoulli-Varignon : le passage à une condition variationnelle permet une application plus large, ouvre la voie à une unification organique de la statique (et de toute la mécanique), augmente le pouvoir descriptif et la puissance explicative des effets physiques. Si l'on s'accorde à concéder à Euler cette intuition vraiment profonde, on doit aussi considérer comme rhétorique tous les arguments qui traitent la loi du repos comme une source ultime d'évidence : rien ne semble pouvoir mieux la justifier que sa réduction au principe des travaux virtuels de Bernoulli-Varignon.

Pourtant il est clair qu'Euler ne pouvait pas accepter une telle démarche au milieu de la querelle de priorité soulevée par König. Il est ainsi naturellement entraîné à rechercher une nouvelle démonstration métaphysique du principe variationnel de l'équilibre, qui, pour éviter toute difficulté liée à la prise en considération de maxima et gagner en évidence, n'aurait pas recours à la tendance de la

(184) Cf. Euler (1751a), 193.
(185) Cf. *ibid.*, 194.

nature à l'épargne. C'est l'objet du deuxième des mémoires de 1751 cités (186).

Si la preuve proposée n'est pas, dans le fond, différente de celle déjà utilisée en 1748 pour montrer que l'équilibre d'un corps dans un champ central demande un minimum de Ω, elle prend ici une forme nouvelle. En représentant une force constante au moyen d'une machine à fils identiques qui, en se contractant avec une puissance constante (187), tirent une corde (inextensible) vers une barre fixe (188), Euler prend comme mesure de cette force le nombre F des fils agissant en même temps. Cela posé, il s'ensuit que l' « action de cette force consiste dans la contraction actuelle des filets (189) », de sorte que si λ est la distance variable entre l'extrémité de la corde et la paroi fixe et a la longueur de la corde, la somme variable des longueurs des filets sera égale au produit $F(\lambda - a)$, « qui est par conséquent la quantité, dont la diminution est le véritable objet de la force (190) ». Toutefois, a étant une quantité constante « l'action de la force consiste dans la diminution de la quantité $F\lambda$ (191) ».

« Ayant donné cette idée de l'action de chaque force, poursuit Euler, on en tirera aisément ce principe général :

« *Que toute force agit autant qu'elle peut.*

« Et dès qu'on aura compris le sens de cette proposition, on ne pourra refuser de l'admettre comme un Axiome. Car, puisque l'action d'une force consiste dans la contraction des filets, dont nous concevons la force

(186) Cf. n. 159 *supra*.

(187) Il est évident qu'il ne s'agit pas ici de « fixer la juste idée des forces », chose qu'Euler fait tout au début de son mémoire en qualifiant une force de « tout ce qui est capable de changer l'état des corps, tant de leur mouvement que du repos » (cf. Euler (1751b), 246). Il s'agit plutôt de représenter la mesure d'une force constante, une fois qu'une unité a été choisie. Une telle représentation n'est d'ailleurs adéquate que si les différentes forces sont prises comme toujours commensurables entre elles. Euler ne fait pas mention de cette restriction que Lagrange dépassera en 1813 dans sa démonstration citée à la note (183) ci-dessus, au moyen d'une présupposition de continuité.

(188) Cf. figure 6.

(189) Cf. *ibid.*, 247. Euler réintroduit ainsi le terme « action » relativement à l'analyse d'une situation d'équilibre, contrairement à ce qu'il avait fait dans le mémoire précédent. Le terme « effort » n'apparaît qu'à la fin du mémoire pour se référer à l'intégrale [M]$\int A d\lambda$ (cf. n. 172 *supra* et 194 *infra*). La sauvegarde stricte du vocabulaire de Maupertuis n'était évidemment qu'un souci externe au raisonnement d'Euler.

(190) Cf. Euler (1751b), 248.

(191) Cf. *ibid.*

composée; ces filets ne cesseront pas de se contracter, tant qu'ils ne rencontrent pas un obstacle invincible, qui s'oppose à leur contraction ultérieure : donc ces filets, et partant aussi la force qui en est composée, agira autant qu'elle peut, ou que les circonstances lui permettront d'agir (192). »

Le passage de ces prémisses à la loi du repos, limitée au cas des forces constantes, n'est certainement pas difficile. En effet, comme dans l'équilibre d'un système de corps libres, les seuls obstacles possibles à l'action d'une force sont constitués par l'action d'autres forces, il est clair que le système sera en équilibre lorsque « les forces dont il est sollicité, sont tellement opposées entr'elles, qu'elles ne sçauroient agir » ou bien lorsque « les filets, dont nous concevons les forces composées, se trouvent dans leur plus grande contraction, de sorte qu'il seroit impossible qu'elles se contractassent davantage » (193). Cela signifie que le système est en équilibre lorsque la somme des quantités $F\lambda$ relatives à toutes les forces agissant sur tous les corps est la plus petite possible. Comme dans un tel modèle, on ne peut entendre les forces que comme des forces motrices (194), on en conclut que le système est en équilibre si $\sum_{i=1}^{m} M_i \sum_{j=1}^{\mu} \Lambda_{j,i}\lambda = \sum_{i=1}^{m} M_i \sum_{j=1}^{\mu} \int \Lambda_{j,i} d\lambda = \text{Min}$ (les forces $\Lambda_{j,i}$ — $j = 1, \dots \mu$; $i = 1, \dots m$ — étant comme en (R) sauf par leur nature de forces constantes).

Le passage à la prise en considération de forces variables ne complique pas les choses. Car, nous dit Euler, il suffit de « supposer le nombre des filets variable, pendant qu'ils se contractent » et donc de considérer le produit $F\lambda$ « décomposé dans ses éléments $Fd\lambda$ » (195), de manière à obtenir directement (R), les forces $\Lambda_{j,i}$ ($j = 1, \dots \mu$; $i = 1, \dots m$) étant variables.

La loi du repos — qui, comme Euler l'avait montré dans le mémoire précédent, peut être envisagée comme le fondement de toute la mécanique — est ainsi dérivée d'un axiome de *générosité*

(192) Cf. *ibid.*, 248-249.

(193) Cf. *ibid.*, 249.

(194) Il est évident que par une telle représentation on décide de la force qui est appliquée à une masse avant de connaître l'accélération qu'elle produit. Pour rendre le modèle adéquat, il faut ainsi que le nombre F des filets qui mesure chaque force dépende de la masse à laquelle la force s'applique, ce qui donne la relation $F = M\Lambda$ (Λ étant comme ci-dessus la force accélératrice) — cf. d'ailleurs *ibid.*, paragr. 13, 251-252.

(195) Cf. *ibid.*, 251.

des forces. Bien que métaphysique dans sa formulation, la réduction des principes du second type aux principes du premier type semble enfin s'être accomplie.

Quelques conclusions

Au début de mon travail, j'ai prétendu que le passage effectué par Lagrange du principe de moindre action au principe des vitesses virtuelles, en tant que principe fondateur de la mécanique, pouvait s'entendre comme une issue au débat épistémologique que j'ai tâché de reconstruire; je reviendrai, en guise de conclusion, sur ce jugement, en essayant de l'éclairer.

Lorsque, en 1761, le jeune Lagrange publie ses deux mémoires sur le calcul des variations (196), son but n'est apparemment autre que de présenter une reformulation de la méthode eulérienne des maxima et minima. Suivant ainsi Euler, il sépare nettement les développements internes de la théorie de ses applications et consacre dans ce dernier domaine tous ses efforts à la résolution des problèmes mécaniques les plus classiques et les plus variés par le moyen d'un principe variationnel qu'il présente comme une « généralisation » du principe eulérien de 1744. Il ne fait aucune référence ni au concept d'action, ni à la discussion sur les principes de Maupertuis, ni à toutes sortes de considérations métaphysiques liées à une tendance quelconque de la nature; il se limite à supposer, sans aucune justification explicite, que, dans le mouvement d'un système quelconque de corps agissant les uns sur les autres, « la formule » $\sum_{i=1}^{m} M_i \int v_i ds_i$ est un maximum ou un minimum, ou bien, que la variation $\delta\left(\sum_{i=1}^{m} M_i \int v_i ds_i\right)$ est nulle. Si, par le simple moyen de son silence, Lagrange donne ainsi la première formulation moderne du principe de moindre action, on ne peut voir dans son mémoire que le souci de montrer que son nouveau calcul était assez habile, puissant et bien structuré pour soutenir, même

(196) Cf. Lagrange (1761a) et (1761b).

sur le terrain difficile de la mécanique, la comparaison avec la méthode d'Euler. La présentation d'une fondation nouvelle de cette science n'est ainsi qu'un résultat induit, une conséquence de la grande puissance de ses outils de travail. Ce sera seulement dans les années suivantes que celle-ci deviendra une des tâches principales de son activité scientifique. La nouvelle architectonique envisagée par Lagrange est bien connue et j'ai essayé ailleurs (197) d'en reconstruire les caractères principaux. Ici je me limiterai à un bref rappel de données que Lagrange retire de la discussion scientifique et philosophique que j'ai essayé de reconstruire et qu'il semble englober dans sa construction même.

La première donnée est l'opposition eulérienne entre méthodes directes, fondées sur une analyse newtonienne des forces, et méthodes indirectes, fondées sur l'affirmation d'un principe variationnel et l'application de la théorie mathématique des maxima et minima. Si les travaux de Maupertuis et d'Euler avaient mené à une grande extension des secondes, ils n'avaient pas donné une réponse complètement convaincante au problème de la justification de leurs principes. Le développement du programme de ce dernier avait même mis à jour, de l'intérieur, le caractère spécieux des preuves métaphysiques portant sur la tendance de la nature à l'épargne, et Euler n'avait ainsi laissé le choix qu'entre des preuves métaphysiques essentiellement différentes, des preuves mathématiques *a posteriori* (ce qui nécessitait la croyance, au moins implicite, à un axiome de « continuité de la vérité ») et l'espérance de pouvoir parvenir, un jour, à des preuves mathématiques *a priori* complètes. Les deux mémoires présentés par le même Euler en 1751 fournissaient une proposition fort intéressante. Les deux principes variationnels de l'équilibre et du mouvement étaient envisagés comme équivalents entre eux et le premier trouvait son soutien dans une preuve métaphysique d'une nouvelle sorte, renvoyant au fond au principe newtonien d'inertie. Si la justification d'une telle équivalence comme la preuve du premier principe pouvaient être discutées, en revanche l'analogie qu'Euler avait mise à jour entre les formules analytiques qui exprimaient les deux principes était assez profonde pour faire songer à la possibilité d'une démonstration mathématique de leur équivalence. De plus, la réduction

(197) Cf. n. 4 *supra*.

de la loi du repos à une formule de nature différentielle — tout à fait implicite dans plusieurs passages du premier mémoire — donnait à celle-ci un contenu difficilement séparable de celui du principe de Bernoulli-Varignon. Ainsi l'idée de chercher une justification pour ce dernier principe, de passer de celui-ci, par intégration, à la loi du repos et, de la loi du repos au principe de moindre action, par le moyen d'une preuve mathématique *a priori* qui restait à découvrir, pouvait bien surgir d'une lecture attentivve des dernières contributions d'Euler.

Un tel programme — intermédiaire entre les deux programmes fondationnels implicitement suggérés respectivement par les méthodes directes et indirectes d'Euler — pouvait d'ailleurs trouver un encouragement dans les résultats obtenus par d'Alembert. Car, en réintroduisant les forces, ces derniers pouvaient bien être lus comme l'esquisse d'une déduction de toute la mécanique à partir du principe d'inertie et de deux nouveaux principes tellement faibles que l'espérance de leur dérivation à partir du deuxième principe de Newton semblait tout à fait raisonnable.

Ainsi, si le premier aboutissement du nouveau calcul lagrangien des variations ne pouvait être que son application à la mécanique dans le cadre des méthodes indirectes d'Euler, une réflexion plus attentive sur le statut de la nouvelle mécanique analytique ne pouvait pas éviter de considérer la possibilité d'une application du formalisme variationnel à la réalisation d'un programme réductionniste visant à fonder la mécanique sur les seuls principes newtoniens. L'introduction de la nouvelle notion de variation permettait d'ailleurs une reformulation fort naturelle et très puissante du principe des travaux virtuels, assez naturelle pour l'envisager comme une conséquence évidente des principes newtoniens (198), assez puissante pour l'employer directement dans la résolution de tous les problèmes principaux de la mécanique. Celle-ci pouvait de cette manière être reconstruite comme une suite d'applications de la méthode algébrique des coefficients indéterminés, les principes variationnels de Maupertuis et d'Euler — ainsi que les principes de conservation — n'étant que des conséquences formelles, qui pou-

(198) Comme on l'a déjà remarqué, la démonstration du principe des travaux virtuels donnée par Lagrange dans la deuxième édition de la *Mécanique analytique* (cf. n. 37 *supra*) a recours à un raisonnement riche d'analogie avec le raisonnement employé par Euler en 1751 pour démontrer la loi du repos.

vaient, en tant que telles, être éliminées sans perte de puissance démonstrative. Si Lagrange est parfaitement conscient que le même édifice pourrait être construit par une démarche inverse, à partir des principes variationnels et par une suite d'applications de la méthode des maxima et minima (199), cette possibilité n'est plus désormais qu'une alternative écartée.

Le passage de Lagrange du principe de moindre action au principe des vitesses virtuelles comme fondement de la mécanique est ainsi, en même temps, le passage des méthodes indirectes aux méthodes directes, d'une pratique démonstrative qui relève des règles de la recherche des extrêmes d'une fonctionnelle à une pratique démonstrative qui ne relève que d'une suite d'applications de la méthode algébrique des coefficients indéterminés (200), d'une mécanique fondée sur des principes du second type à une mécanique fondée sur les principes de la mécanique newtonienne. La mécanique analytique de Lagrange n'est ainsi qu'une reformulation — et une généralisation — de cette dernière dans le cadre d'un programme réductionniste.

Si une telle reformulation conduit à une extraordinaire « économie de la pensée (201) », conduit-elle aussi à un véritable progrès par rapport à la puissance descriptive et explicative des méthodes eulériennes? N'est-ce pas plutôt l'approche d'Euler — simplement revêtue du formalisme lagrangien — que l'on retrouve à l'œuvre dans la mécanique classique moderne?

(199) Cf. Lagrange (1788), 211-212 et (1811-1815), t. I, 299.

(200) Il est clair que dans le cadre du formalisme variationnel, l'opposition entre méthodes directes et indirectes prend la forme d'une opposition entre des procédés dans lesquels les variations n'entrent que comme de simples quantités algébriques indéterminées et des procédés dans lesquels elles entrent dans le cadre de la recherche d'une extrémale. Ce qui est essentiel à la mécanique analytique de Lagrange, c'est la notion de variation envisagée comme augmentation indéterminée et indépendante des variables de position, non *le calcul des variations* proprement dit (cette distinction est à mon avis capitale pour comprendre comment Lagrange a pu, dans la *Théorie des fonctions analytiques* — cf. Lagrange (1797) et 2ᵉ éd. (Paris : Courcier, 1813) — reformuler tous les fondements de sa mécanique sans aucune référence au *calcul des variations*).

(201) Cf. Mach (1883), 449.

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations

Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mém. Math. Phy.	*Histoire de l'Académie Royale des Sciences [de Paris], Mémoires de Mathématique et de Physique*
Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.	*Commentarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae*
Comm. Acad. Sci. Petrop.	*Commentarii Academiae scientiarum petropolitanae*
Hist. Acad. Roy. Sci. et Bell. Lett. [de Berlin], Mém.	*Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres [de Berlin], Mémoires*
Arch. Hist. Exact Sci.	*Archive for History of Exact Sciences*
Stud. Hist. Phil. Sci.	*Studies in History and Philosophy of Sciences*

Alembert, Jean-Baptiste Le Rond d',
(Act.) Action, in *Encyclopédie méthodique, mathématiques,* 3 t. (Paris : Panckoucke/Liège : Plomteux, 1784-1789), t. I[er], 18-20.
(Cosm.) Cosmologie, *ibid.,* 427-432.
(El. Sci.) Elémens des sciences, *ibid.,* vol. V (1755), 491a-497b.
(For.) Force, *ibid.,* vol. VII (1762), 110b-120a.
(1743) *Traité de dynamique,* 1[re] éd. (Paris : David).
(1758) *Traité de dynamique,* 2[e] éd. (Paris : David).

Arcy, Patrice d',
(1749) Reflexions sur le principe de la moindre action de M. de Maupertuis, *Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mém. Math. Phy.* (1749 [publ. 1753]), 531-538.
(1752) Replique à un Mémoire de M. de Maupertuis sur le principe de la moindre action [...], *ibid.* (1752 [publ. 1756]), 503-519.

Arnold, Vladimir,
(1976) *Les Méthodes mathématiques de la mécanique classique* (Moscou : Mir [éd. russe : 1974]).

Bartholmèss, Christian,
(1850-1851) *Histoire philosophique de l'Académie de Prusse* (Paris : Marc Ducloux), 2 vol.

Bernoulli, Daniel,

(1726) Examen principiorum mechanicæ, et demonstrationes geometricæ de compositione et resolutione virium, présenté en février 1726, *Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.,* I (1726 [publ. 1728]), 126-142.

(1738) Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum [...], *Comm. Acad. Sci. Petrop.,* X (1738 [publ. 1747]), 116-124.

Bernoulli, Jean I^er^,

(1727) Theoremata selecta pro conservatione virium [...] (excerpta ex epistolis datis ad filium Danielem, 11 oct. et 20 dec. (stil. nov.) 1727), *ibid.,* II (1727 [publ. 1729]), 200-207.

Bertrand, Louis,

(1753) Examen des réflexions de M. le chevalier d'Arcy sur le principe de la moindre action, *Hist. Acad. Roy. Sci. et Bell. Lett. [de Berlin], Mém.,* 9 (1753 [publ. 1755]), 310-320.

Brunet, Pierre,

(1929) *Maupertuis. I. Etude biographique. II. L'œuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique du* XVIII^e^ *siècle* (Paris : Hermann).

(1938) *Etude historique sur le principe de la moindre action* (Paris : Hermann).

Costabel, Pierre,

(1986) Introduction à la correspondance d'Euler avec P.-L. M. de Maupertuis, in Euler (Œuvr.), *op. cit. infra,* sér. IV-A, vol. VI, 4-28.

Courtivron, Gaspard,

(1748-1749) Recherches de statique et dynamique [...], *Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mém. Math. et Phy.* (1748 [publ. 1752]), 304, et (1749 [publ. 1753]), 15-27.

Descartes, René,

(Lettr.) *Lettres de Mr. Descartes, où sont traittées les plus belles questiones de la morale, de la physique, de la médecine et des mathématiques* (Paris : C. Angot, 1657-1667), 3 vol.

Dhombres, Jean,

(1986) Un style axiomatique dans l'écriture de la physique mathématique au XVIII^e^ siècle : Daniel Bernoulli et la composition des forces, *Sciences et Techniques en perspective,* XI-XII, 1-38.

Dugas, René,

(1950) *Histoire de la mécanique* (Paris : Dunod et Neuchâtel : Ed. du Griffon).

Euler, Leonhard,

(Œuvr.) *Opera Omnia* (Leipzig-Berlin-Basel : Soc. Sci. Nat. Helveticæ, 1911-...).

(1736) *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita* (Petropoli : Typ. Acad. Scientiarum), 2 vol.

(1744) *Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimive proprietate gaudentes* (Lausanne et Genevæ : M. M. Bousquet et Soc.).

(1748a) Recherches sur les plus grands et les plus petits qui se trouvent dans les actions des forces, *Hist. Acad. Roy. Sci. et Bell. Lett. [de Berlin], Mém.*, IV (1748 [publ. 1750]), 149-188.

(1748b) Réflexions sur quelques loix générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques, *ibid.*, 189-218.

(1751a) Harmonie entre les principes generaux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis, *ibid.*, VII (1751 [publ. 1753]), 169-198.

(1751b) Essay d'une démonstration métaphysique du principe générale de l'équilibre, *ibid.*, 246-254.

(1751c) Sur le principe de la Moindre Action, *ibid.*, 199-218.

(1751d) Examen de la dissertation de M. le professeur Koenig [...] et Addition, *ibid.*, 219-239 et 240-245.

(1753a) *Dissertatio de principio minimæ actionis una cum examine objectionum cl. prof. Koenigii [...]* (Berolini : ex officina Michælis).

(1753b) *Dissertation sur le principe de la moindre action, avec l'examen des objections de Mr. le professeur Koenig [...]* (a Leide : imp. d'Elie Lusac).

Fermat, Pierre de,

(Œuvr.) *Œuvres de Fermat*, publ. par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry (Paris : Gauthier-Villars et fils, 1891-1896), 3 vol.

Fleckenstein, Joachim Otto,

(1957) Vorwort des Herausgebers, in Euler (Œuvr.), *op. cit. supra*, sér. II, vol. V, VII-LI.

Fraser, Craig,

(1983) J. L. Lagrange's Early Contributions to the Principles and Methods of Mechanics, *Arch. Hist. Exact Sci.*, XXVIII, 197-241.

(1985) D'Alembert Principle : the Original Formulation and Application in Jean d'Alembert's *Traité de Dynamique* (1743), *Centaurus*, XXVIII, 31-61 et 145-159.

(1990) Lagrange's Analytical Mathematics, its Cartesian Origins and Reception in Comte's Positive Philosophy, *Stud. Hist. Phil. Sci.*, XXI, 243-256.

Guéroult, Martial,
(1934) *Dynamique et métaphysique leibniziennes* (Strasbourg : Publications de la fac. des lettres de l'univ. de Strasbourg), fasc. 68.

Huygens, Christiaan,
(1673) *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometrica* (Paris : F. Muguet).

Jouguet, Emile,
(1908-1909) *Lectures de mécanique* (Paris : Gauthier-Villars), 2 parties en 2 vol.

König, Jamvel,
(1751) De universali principio æquilibri et motus [...], *Nova Acta eruditorum,* 125-135.

Lagrange, Joseph-Louis,
(1761a) Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, *Mélanges de philosophie et de mathématiques de la Société royale de Turin,* II (1760-1761), deuxième partie, 173-195.
(1761b) Applications de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique, *ibid.,* 196-298.
(1764) Recherches sur la libration de la lune [...], *Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie royale des sciences [de Paris],* IX (pièces de 1764-1766, 1770 et 1772), 1-50.
(1788) *Méchanique analytique* (Paris : La veuve Desaint).
(1797) *Théorie des fonctions analytiques* (Paris : Impr. de la Rép.).
(1811-1815) *Mécanique analytique* (Paris : Courcier), 2 vol.

Lambert, Johann Heinrich,
(1765-1772) *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* (Berlin : Buchladen der Realschule), 3 vol.

Landau, Lev et Lifchitz, Eugéni,
(1969) *Mécanique,* 3e éd. (Moscou : Mir).

Mach, Ernst,
(1883) *Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Historisch-kritisch Dargstellt* (Leipzig : F. A. Brockaus); trad. fr. citée : *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement* (Paris : Hermann, 1904).
(1905) *Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung* (Leipzig : J. A. Barth); trad. fr. citée : *La Connaissance et l'erreur* (Paris : Flammarion, 1917).

Martens, Hartin,
(1752) *Aanmeriking over de [...]. Remarques sur la loi de l'épargne dont on fait à présent tant de cas et que Mr. de Maupertuis tâche d'introduire [...]* (Amsterdam : P. Mortier).

Maupertuis, Pierre-Louis Moreau de,
(1740) Loi du repos des corps, présenté le 20 février 1740, *Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mém. Math. Phy.* (1740 [publ. 1742]), 170-176.
(1744) Accord de différentes Loix de la Nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles, présenté le 15 avril 1744, *ibid.,* (1744 [publ. 1748]), 417-426.
(1746) Les loix du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique, *Hist. Acad. Roy. Sci. et Bell. Lettr. [de Berlin], Mém.,* II (1746 [publ. 1748]), 267-294.
(1750) *Essay de cosmologie* (s. l. [peut-être Amsterdam : cf. J. C. Poggendorf, *Biogr.-Lit. Handw. zur Gesch. der ex. Wiss.,* Band II (Leipzig : J. A. Bart, 1863), col. 85] : s. e.).
(1752) Réponse à un mémoire de M. d'Arcy inseré dans le volume de l'Académie royale des sciences de Paris pour l'année 1749, *Hist. Acad. Roy. Sci. et Bell. Lettr. [de Berlin], Mém.,* VIII (1752 [publ. 1754]), 293-298.
(1756) Examen philosophique de la preuve de l'existence de Dieu employée dans l'Essai de cosmologie, *ibid.,* XII (1756 [publ. 1758]), 389-424.

Montucla, Jean,
(1799-1802) *Histoire des mathématiques,* 2e éd. (Paris : H. Agasse), 4 vol.

Panza, Marco,
(1991-1992) The analytic foundation of mechanics of discrete systems in Lagrange's *Théorie des fonctions analytiques,* compared with earlier treatments of this topic, *Historia Scientiarum,* XLIV (1991), 87-132 et XLV (1992), 181-212.

Petitot, Jean,
(1987) Mathématiques et ontologie, in Fabio Minazzi et Luigi Zanzi (a cura di), *La Scienza tra filosofia e storia in Italia nel Novecento* (Roma : Poligrafico dello Stato), 191-211.

Pulte, Helmut,
(1989) *Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Me chanik* (Stuttgart : F. Steiner Verlag), « Studia Leibnitiana », Sond. 19.

Tonelli, Giorgio,
(1987) *La Pensée philosophique de Maupertuis* (Hildesheim-Zürich-New York : G. Olms).

Truesdell, Clifford,
(1960) *The Rational Mechanics of flexible or elastic bodies (1638-1788)*, vol. XI/2 de la sér. II de Euler (Œuvr.), *op. cit. supra.*

Varignon, Pierre,
(1725) *Nouvelle mécanique ou statique* (Paris : C. Jombert), 2 vol.

Winter, Eduard J.,
(1957) *Die Register der Berliner Akademie der Wissenschaften [1746-1766]* (Berlin : Akademie-Verlag).

Addendum (décembre 1995)

Mon article ayant été envoyé à la *Revue d'histoire des sciences* à la fin de l'année 1990, sa bibliographie n'est plus à jour. Parmi les dernières publications concernant l'argument considéré ici, je me limiterai à mentionner les suivantes :

Barroso Filho W., *La Mécanique de Lagrange. Principes et méthodes* (Paris : Karthala, 1994).

Blay Michel, *La Naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles* (Paris : PUF, 1992).

Dhombres Jean et Radelet-De Grave Patricia, Contingence et nécessité en mécanique. Etude de deux textes inédits de Jean d'Alembert, *Physis*, XXVIII (1991), 35-114.

Galletto Dionigi, Lagrange e le origini della meccanica analitica, *Giornale di fisica*, XXXII/2-3 (1991), 1-126.

Panza Marco, Eliminare il tempo : Newton, Lagrange e il problema inverso del moto resistente, in Massimo Galuzzi (éd.), *Giornate di storia della matematica* (Commenda di Rende, Cosenza : Editel, 1991), 487-537.

ANNEXE

Quelques remarques à propos des relations entre les croyances religieuses et le programme de mathématisation des sciences de la nature à l'époque des lumières

La question des relations entre les croyances religieuses et le programme de mathématisation de la nature est fort délicate, à une époque où la nouvelle science n'a pas encore rompu ses liens avec la théologie. Car il ne s'agit pas simplement de remarquer l'opposition classique entre un Dieu souverain et un Dieu architecte et de souligner l'impossibilité de concilier la notion du premier avec le programme d'une science mathématique de la nature. C'est la notion même d'un Dieu architecte qui est mise en cause par le programme de mathématisation des sciences de la nature. Le nécessitarisme intrinsèque à une mécanique comme branche des mathématiques ne relève pas tout bonnement de l'obéissance de la nature aux lois, mais de l'obéissance de ces lois aux conditions qui permettent une description mathématique des phénomènes. En tant qu'architecte suprême, Dieu ne peut se limiter à projeter un monde possible parmi d'autres, il doit projeter le nécessaire tout court : il est responsable des lois de la logique et pas simplement des lois du monde. Ainsi, ou bien une philosophie anti-nécessitariste (en un sens radical) fait la différence entre le niveau « objectif » saisi par les théorèmes de la mécanique et un niveau (constitutif du monde réel) qui leur échappe pour des raisons de principe, ou bien elle doit s'opposer d'emblée au programme de la nouvelle mécanique. Cet embarras est bien exprimé par le thème du concours de l'Académie de Berlin pour l'année 1758, la question étant de savoir « si la vérité des Principes de la Statique et de la Mécanique est nécessaire, ou contingente » (cf. Winter (1957), 224, séance du 3 juin 1756. Celle-ci fut la dernière à laquelle prit part Maupertuis; le concours fut ensuite renvoyé à l'année 1760 — cf. *ibid.*, 239, séance du 1er juin 1758 — et clos sans adjudication du prix — cf. *ibid.*, 257, séance du 5 juin 1760 —; les pièces envoyées pour y participer sont conservées au Zentrales Archiv der Akademie der Wissenschaften de Berlin, cotes I-M 529-I-M 535). Assez significative est la réponse très embrouillée donnée par d'Alembert dans une addition à la préface de la deuxième édition de son *Traité de Dynamique* (d'Alembert (1758), XXIV-XXIX), où il semble essayer de mettre Dieu (le Dieu souverain) à l'abri des conséquences évidentes de ses résultats mêmes (voir dans la note (50) ci-dessus comment d'Alembert a beaucoup insisté dans le même *Traité* sur le caractère de « définition » du deuxième principe de Newton).

« Il ne s'agit pas de décider, écrit-il, si l'Auteur de la nature auroit pu lui donner d'autres loix que celles que nous y observons; dès qu'on admet un être intelligent capable d'agir sur la matiere, il est évident que cet être peut à chaque instant la mouvoir et l'arrêter a son gré [...]; l'expérience continuelle des mouvements de notre corps, nous prouve assez que la matiere, soumise à la volonté d'un principe pensant, peut s'écarter dans ses mouvements de ceux qu'elle auroit véritablement si elle étoit abandonée à elle-même. La question proposée se réduit donc à savoir si les loix de l'équilibre et du mouvement qu'on observe dans la nature, sont différentes de celles que la matiere abandonée à elle-même auroit suivies. » (*Ibid.,* XXIV-XXV.)

De son côté, Maupertuis semble avoir saisi la difficulté dès 1746, mais sa réponse reste au moins faible (sur ce point, cf. Tonelli (1987), 18-19). Voici ce qu'il écrit :

« S'il est vrai que les loix du Mouvement et du Repos soient des suites indispensables de la nature des Corps, cela même prouve encore plus la perfection de l'Etre suprême : C'est que toutes choses soient tellement ordonnées, qu'une Mathématique aveugle et nécessaire exécute ce que l'intelligence la plus éclairée & la plus libre prescriroit. » (Maupertuis (1746), 279.)

Bien qu'en 1750, dans son *Essay de cosmologie* — Maupertuis (1750) —, il présente de nouveau le même argument — l'« avant-propos » et un grand morceau (pages 43-45 et 52-79) de la première partie de l'*Essay de cosmologie* reproduisent sans grandes modifications les articles I et II du mémoire de 1746, les parties III et IV étant d'ailleurs constituées respectivement par l'article III de ce même mémoire et par le mémoire de 1744 sur la réfraction de la lumière (cf. ci-dessus); la citation précédente s'y trouve aux pages 41-42, en conclusion de l' « avant-propos » —, il arrive, d'une manière fort ambiguë, à prétendre que, si les principes de conservation de la quantité de mouvement et des forces vives « sembloi[en]t soustraire le Monde à l'empire de la Divinité », le principe de moindre action est « plus conforme aux idées que nous devons avoir des choses, [car il] laisse le Monde dans le besoin continuel de la puissance du Créateur; et est une suite nécessaire de l'emploi le plus sage de cette puissance » (*ibid.,* 77).

L'ambiguïté semble levée dans un nouveau mémoire, de 1756, explicitement consacré par Maupertuis à discuter l'objection de « ces philosophes » qui avaient soutenu que pour que les lois du mouvement des corps pussent être employées pour démontrer « l'existence de l'Etre supreme », il fallait que celles-ci ne fussent pas « des suites nécessaires de la nature des corps » (Maupertuis (1756), en particulier 390). Car, si d'un côté Maupertuis insiste sur le fait que « si les choses se trouvent dans le monde tellement combinées que la nécessité y exécute ce que l'intelligence prescrivoit, la souveraine sagesse et la souveraine puissance n'en seroient que plus fortement établies » (*ibid.*), il entame de l'autre une longue argumentation pour en conclure que les lois de la nature — en commençant par les principes eux-mêmes — ne peuvent qu'être considérées comme des vérités contingentes.

> « En refusant à toutes ces Loix, conclut-il, la prétendue prérogative d'une nécessité mathématique, on y en découvre une autre bien plus précieuse; c'est le caractère du choix d'un être intelligent et libre : C'est de porter l'empreinte de la sagesse et de la puissance de celui qui les a établies. » (*Ibid.,* 424.)

Il n'est pas nécessaire de souligner ici les difficultés qui s'opposent à une conciliation d'un tel point de vue tardif de Maupertuis avec les conceptions de 1740 à propos de l'évidence des principes newtoniens, la certitude des lois de la mécanique ne pouvant désormais s'appuyer que sur une fantomatique « confirmation par l'expérience » (cf. *ibid.,* 402).